Exercice n°1 :

Résoudre dans IR l'inéquation : $e^{2x} - 2{,}1\, e^{x} + 1{,}1 \geqslant 0$

Exercice n°2

Soit g la fonction définie sur $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ par : $g(x) = \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) Trouver la limite de g en $-\infty$. Qu'en déduit on pour C ?
2) Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \beta \text{ pour tout } x > \frac{1}{2} \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

   Trouver le nombre β tel que f soit continue en $\frac{1}{2}$.

Exercice n°3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x^2)} = (e^3)^4 \times e^{-x}$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x)^2 \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^3$.
3) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$.

   Justifier que h est continue en 0.
4) Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'inéquation : $e \times e^{\sin x} \geq e^{\frac{3}{2}}$.

Exercice n°4

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + (1-x)\,e^{2x}\right)$

On note C la courbe représentant f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   b) Montrer que la droite D d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à C.

   Etudier la position de C par rapport à D.
2) Montrer que f est dérivable sur IR et calculer sa dérivée $f'(x)$.
3) Soit u la fonction définie sur IR par $u(x) = 1 + (1-2x)\,e^{2x}$

   a) Etudier le sens de variation de u.

   b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;1]$.

   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

   c) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5) Construire C.

Exercice n°5

Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x e^x$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, la fonction $u + v$ est une fonction solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3) Déterminer la fonction solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ $\forall x>0$ et $f(0) = 0$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 5 cm)

1) Démontrer que la droite d'équation y = 1 est asymptote à $\mathcal{C}$

2) Pour x > 0 , calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ et étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0.

Que peut-on en déduire pour f ? Pour $\mathcal{C}$?

3) Démontrer que pour x > 0 ,on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

4) Dresser le tableau de variations de f.

On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

5) Montrer que, dans $]0;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

6) Montrer que : $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle, notée α dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.

7) On pose A = $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$: donner un encadrement de A à 10^{-1} près (justifier)

puis montrer que A = $f'(\alpha)$

8) Pour tout a > 0 , on note (T_a) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

Montrer que T_α a pour équation y = Ax.

Tracer (T_α) et $\mathcal{C}$

9) Déduire des questions précédentes que, de toutes les tangentes (T_a) , seule (T_α) passe par l'origine.

10) On admettra que (T_α) est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0;+1[$

a) par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = m

(discuter selon les valeurs de m)

b) par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'´equation f(x) = mx

(discuter selon les valeurs de m)