Exercice n°1 :

Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x}-2{,}1\,e^{x}+1{,}1\geqslant 0$ a les mêmes solutions que $X^2-2{,}1\,X+1{,}1\geqslant 0$ où X est égal à e^{x}
Ce trinôme se factorise en $(X-1)(X-1{,}1)$ d'où : l'inéquation est équivalente à $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-1{,}1)\geqslant 0$.

Les solutions sont donc x $\in\ ]-\infty\,;0[\cup]\ln(1{,}1)\,;+\infty[$

Exercice n°2

Pour trouver la limite de g en $-\infty$, on examine les termes de plus haut degré en x qui sont x et x^3.
Ici la limite est celle de $\dfrac{1}{x^2}$, donc 0 par valeurs positives : l'axe Ox est asymptote à la courbe C

Lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$, $g(x)$ tend vers la valeur $g(0)$ qui vaut $\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{8}-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{8}{7}\right)=-\dfrac{12}{7}$.

Pour que f soit continue en $x=\dfrac{1}{2}$, il faut que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x}{2}+\beta$ soit égale à cette valeur ;

il vient donc que $\dfrac{1}{4}+\beta=-\dfrac{12}{7}$ d'où $\beta=-\dfrac{55}{28}$

Exercice n°3

1) dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x^2)}=\left(e^3\right)^4\times e^{-x}$ s'écrit $\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{12-x}$ et les solutions sont donc, par passage au logarithme, (bijectif) celles de $x^2+x-12=0$ qui sont -4 et 3
2) dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\left(e^x\right)^2\leq\left(\dfrac{1}{e}\right)^3$ se transforme par la fonction ln (croissante) en $2x\leqslant -3$ donc $x\leqslant -\dfrac{3}{2}$
3) Lorsque x tend vers 0, on peut confondre la courbe représentant e^{x} avec.sa tangente au point $(0,1)$qui est la droite d'équation $y=x+1$; donc pour x assez petit $h(x)\sim\dfrac{x^2}{x}$ et $\lim\limits_{x-0}h(x)=h(0)$: h est continue au point d'abscisse 0.
4) Par passage au logarithme (croissant) l'inéquation : $e\times e^{\sin x}\geq e^{\frac{3}{2}}$ .devient $1+\sin x\geqslant\dfrac{3}{2}$ d'où $x\in[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}]$..

Exercice n°4

Soit $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+(1-x)\,e^{2x}\right)$

Les limites de f sont : $\lim\limits_{x\to+\infty}f=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f=-\infty$; Lorsque x tend vers $-\infty$, e^{2x} tend vers 0 et «l'emporte» sur $1-x$ qui tend vers $+\infty$, donc $f(x)\sim\dfrac{x}{2}$ dans ce cas : D est asymptote.

Comme $f(x)-\dfrac{x}{2}$ vaut $\dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}$ qui est une quantité positive pour $x<1$, C est au-dessus de D.

f, somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(-\mathrm{e}^{2x}+2(1-x)\,\mathrm{e}^{2x}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{e}^{2x}-2x\,\mathrm{e}^{2x}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{e}^{2x},$$

donc $f'(x)=\dfrac{u(x)}{2}$ si u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+(1-2x)\,e^{2x}$.

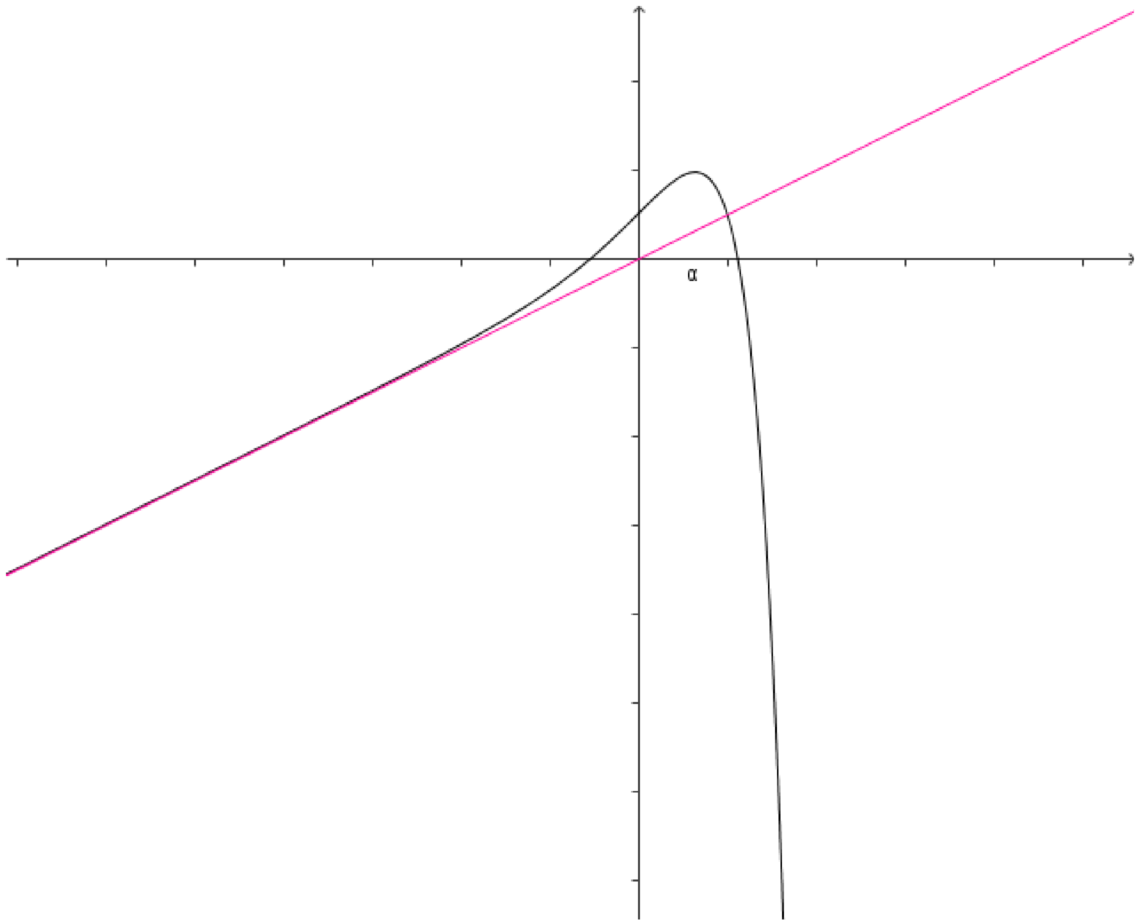
Pour étudier le sens de variation de cette fonction, dérivons là ; il vient $u'(x)=-4x\,\mathrm{e}^{2x}$ Le signe de u' est donc déterminé par celui de x puis que e^{2x}est toujours positif.

$u(x)$ est donc croissante sur]-∞;0[et décroissante sur [0;+∞[comme $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty$ et $u(0)=2$, la fonction u prend une fois et une seule la valeur 0 lorsque x croit de 0 à $+\infty$. De plus $u(1)=1-e^2<0$, donc cette racine α tel que u(α)=0 est dans l'intervalle [0;1].

Le calcul montre que la valeur 0,64 est une valeur approchée par excés de α à 10^{-2} près.

On rassemble ces résultats dans le tableau de variation de f et l'on effectue le tracé

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	--	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$



Exercice n°5

Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x\,e^x$

Si $u(x) = (ax+b)\,e^x$ alors $u'(x)$ vaut $(ax+b+a)\,e^x$ et donc $u' - 2u$ s'écrit $(-ax+a-b)\,e^x$.

Si u est solution de (1) on a donc nécessairement $\forall$x, $-ax+a-b=x$ d'où $b=a=-1$

La fonction $u(x)$ de la forme $(ax+b)\,e^x$ qui est solution de (1) est donc $-(1+x)\,e^x$

Si v est une solution de l'équation (2) alors la fonction y=$u+v$ est une fonction solution de (1), puisque la dérivée de $u+v$ est $u'+v'$: y' vaut donc $u'-2u+v'-2v$ qui est égal à $x\,e^x$ puisque $v'-2v$ est nulle et u solution de (1) ;

réciproquement si $y=u+v$ est solution de (1) alors y' = $u'+v'$ vérifie que
$y'-2y=(u'-2u)+(v'-2v)=x\,e^x$ et donc $v'-2v=0$ ce qui montre que v est solution de l'équation (2).
Les fonctions solutions de (2) sont les fonctions $x -> K\,e^{2x}$ et donc les solutions de (1) s'écrivent :
$y(x)=K\,e^{2x}-(1+x)\,e^x$ (en dérivant on a bien $y'(x)-2y(x)=x\,e^x$)

La fonction solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 est telle que $K\,e^0 - e^0 = 0$ ce qui donne $K=1$

Cette fonction est $f(x)=e^{2x}-(x+1)\,e^x$

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur [0;+∞[par : $f(x) = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ $\forall$x>0 et f(0) = 0

Pour x > 0 , on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} = (x^2+x+1)\left(\dfrac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ et quand x tend vers 0,

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty}(t^3)\,e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{e^t} = 0$; comme le terme x^2+x+1 tend vers 1, l'expression étudiée a pour limite O. f est donc dérivable en $x=0$ et C y possède une tangente horizontale.

La fonction f peut s'écrire $e^{-\frac{1}{x}} + \left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \left(\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$; cela nous permet de déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$, qui est 1 ; et comme la dérivée de $l(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ est (cf le théorème sur la dérivée d'une fonction composée) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, nous calculons la dérivée de la fonction f comme égale à :

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} - \left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}} \text{ soit } \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}\ i\cdot e\cdot d$$

Premier terme: dérivée de l	Deux termes : dérivée du produit $\left(\frac{1}{x}\right)l(x)$	Deux termes : dérivée du produit $\left(\frac{1}{x^2}\right)l(x)$

Le signe de f' est donc celui de $1-x$ car x^4 et $e^{-\frac{1}{x}}$ sont tous deux positifs $(x>0)$

x	0		1		$+\infty$
signe de f'		+	0	$-$¿	
f	0	↗	3/e	↘	1

Soit $g(x) = f(x) - xf'(x)\cdot$ Il vient que $g(x)$ vaut $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2} - \dfrac{1-x}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$; réduisant au même dénominateur x^3 le terme entre () a pour numérateur x^3+x^2+2x-1 ; ce qui prouve l'équivalence logique proposée, puisque l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme $P(x) = x^3+x^2+2x-1$ a pour dérivée $3x^2+2x+2$, trinôme qui n'a pas de racines réelles (son discriminant vaut -20) et qui par conséquent est toujours positif ; la fonction $P(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

comme $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, le théorème de la bijection s'applique et donc $P(x)=0$ admet une seule racine réelle α. De plus $P(0)=-1$ et $P(1)=3$ donc $\alpha \in [0;1]$

Le calcul mène à $\alpha \approx 0\cdot 4$ et même $0\cdot 39 < \alpha < 0\cdot 4$

Soit $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$: comme $0{,}39 < \alpha < 0{,}4$ et que f est croissante $f(0{,}39) < f(\alpha) < f(0{,}4)$

Le passage à l'inverse de la première inégalité donne $\left(\dfrac{1}{0{,}4}\right) < \left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < \left(\dfrac{1}{0{,}39}\right)$ et la multiplication de ces inégalités ***entre nombres positifs*** donne $\left(\dfrac{f(0{,}39)}{0{,}4}\right) < A < \left(\dfrac{f(0{,}4)}{0{,}39}\right)$ d'où $A \approx 2$ à 0.01 près.

α est solution de g(α)=0 et $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$ donc $f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = A$

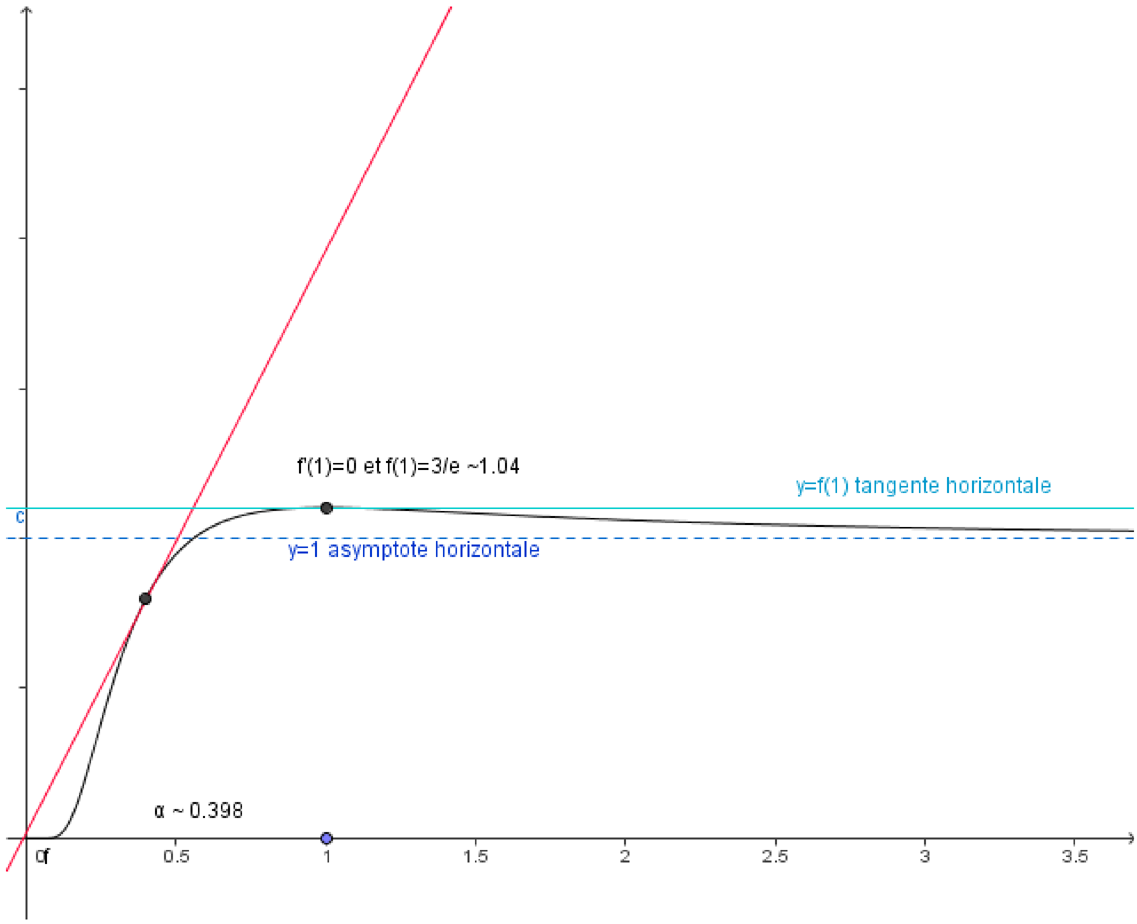
La doite (T_a) est tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a : son coefficient directeur est $f'(a)$, et elle passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$; donc son équation est :

$$y = f(a) + (x-a) f'(a)$$

pour a = α il vient : $y = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha)$

mais $f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = A$ donc $y = f(\alpha) + Ax - f(\alpha) = Ax$

Graphe de f avec toutes les données trouvées :



La situation (elle passe par O) de la tangente en α est due à l'égalité $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Comme il n'y a pas d'autre valeur de x qui soit solution (racine de P, donc solution de $g(x)=0$), cette tangente est la seule à passer par l'origine.

Si $m < 1$ l'équation $f(x) = m$ a une seule solution ; si $1 \leqslant m < \left(\dfrac{3}{e}\right)$ elle en a 2, et une seule (1) pour $m = \dfrac{3}{e}$: cela correspond aux intersections de la droite y=m avec $\mathcal{C}$. Si $m > \left(\dfrac{3}{e}\right)$ il n'y a pas de solution.

La droite $y = mx$ **ne coupe pas** $\mathcal{C}$ si $m < 0$, ou si $m > A$; si $m = 0$ ou si $m = A$ elle est **tangente** à $\mathcal{C}$; si $0 < m < A$ il y a **2 intersections distinctes**.