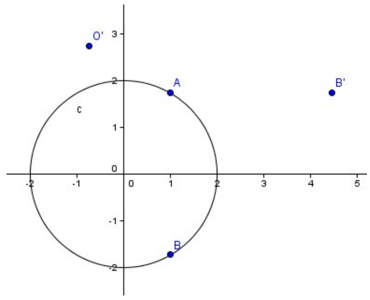
I 1) L'équation $z^2-2z+4=0$ a pour discriminant -12, dont les racines carrées complexes sont $\pm 2i\sqrt{3}$; par conséquent les racines de l'équation donnée sont

$$\boxed{z'=1+i\sqrt{3}} \text{ et } \boxed{z''=1-i\sqrt{3}}.$$

On a $|z'|=|z''|=2$ et $\arg(z')=-\arg(z'')=\dfrac{\pi}{3}$ d'où $\boxed{z'=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$ et $\boxed{z''=2\,e^{-\frac{i\pi}{3}}}$

2) Soit $A=(z')^{2004}=(2^{2004})\,e^{i\frac{2004\pi}{3}}$; or 2004 est divisible par 3, donc $\boxed{A=2^{2004}+i\,0}$



3) Les deux affixes de A et B ont le même module, 2.
A et B sont donc sur le cercle de centre O et de rayon2.

4) O' est défini par la relation $\overrightarrow{AO'}=\dfrac{e^{-i\pi}}{2}\overrightarrow{AO}=-i\,\overrightarrow{AO}$;
il vient que $z_{o'}-(1+i\sqrt{3})=-i(-1-i\sqrt{3})$ et on en tire l'affixe de O' :
$\boxed{z_{o'}=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}$

de même B' est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{B'A}=i\,\overrightarrow{BA}$: il vient que
$(1+i\sqrt{3})-z_{B'}=i(1+i\sqrt{3}-(1-i\sqrt{3}))=-2\sqrt{3}$ d'où
$\boxed{z_{B'}=1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$

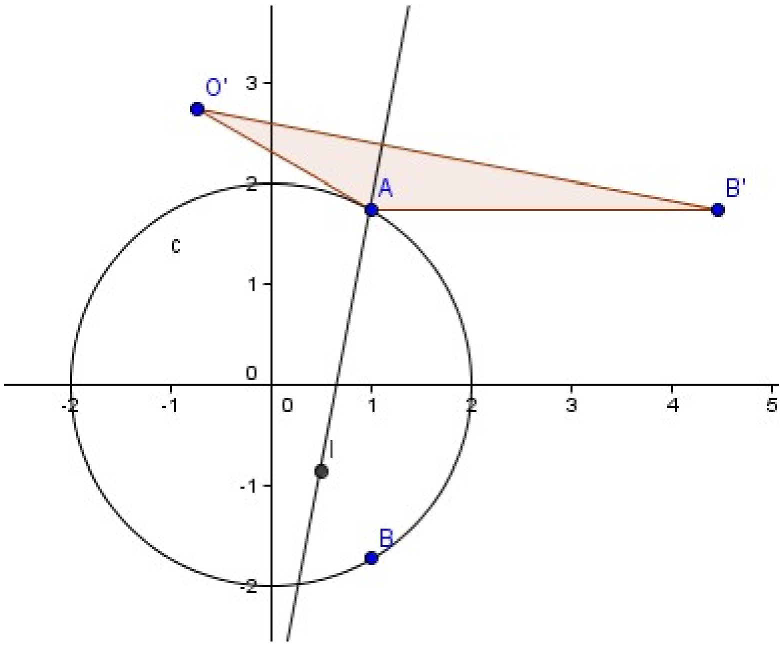
5) a) Il est probable que la droite AI est la hauteur issue de A du triangle AO'B'.

b) le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour affixe $z_I-z_A=\left(\dfrac{1}{2}\right)z_B-z_A=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}-(1+i\sqrt{3})=\boxed{\dfrac{-1-3i\sqrt{3}}{2}}$

le vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ a pour affixe $z_{B'}-z_{O'}=(1+2\sqrt{3}-1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1-\sqrt{3})=3\sqrt{3}-i$

c) le rapport de ces deux affixes est $\dfrac{2(3\sqrt{3}-i)}{-1-3i\sqrt{3}}=\dfrac{2(3\sqrt{3}-i)(-1+3i\sqrt{3})}{28}=\dfrac{0+25i}{14}$;

ce rapport est imaginaire pur, ce qui démontre la conjecture du a) : les deux vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ sont orthogonaux, donc la droite (AI) est bien la hauteur issue de A dans le triangle $AO'B'$:



II Partie I

1. Le centre Ω a pour affixe $\omega=\dfrac{z_I}{2}$ soit $\dfrac{1}{2}+0\,i$; le rayon du cercle C est égal à $\dfrac{OI}{2}=\dfrac{1}{2}$;

Or la différence $a_0-\omega$ vaut $\dfrac{i}{2}$, son module est égal à $\dfrac{1}{2}$: A_0 est bien sur C.

2. a) $b'=a_0\,b=\dfrac{1+i}{2}(-1+2\,i)$ donc $\boxed{b'=\dfrac{-3+i}{2}}$

b) Calculons le rapport r des affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{BB'}$: $\dfrac{-3+i}{2}$ et $\dfrac{-3+i}{2}+1-2\,i$:

$$r=\frac{-3+i}{-1-3\,i}=\frac{(-3+i)(-1+3\,i)}{5}=-\frac{9\,i}{5}\text{ a pour argument }-\frac{\pi}{2}$$

donc les deux vecteurs sont orthogonaux : $\boxed{OBB'\text{ est rectangle en }B'}$

Partie II

1. 1) a) l'argument de $\dfrac{a-1}{a}$ est la mesure de l'angle orienté ($\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IO}$).

b) Comme M' a pour affixe az et M pour affixe z, les vecteurs $\overrightarrow{M'O}$ et $\overrightarrow{M'M}$ sont respectivement associés aux nombres $-az$ et $z-az$. L'angle orienté ($\overrightarrow{M'O},\overrightarrow{M'M}$) est donc égal à $\arg\left(\dfrac{z-az}{-az}\right)=\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$ à $2k\pi$ près.

OMM' rectangle en M' signifie que l'angle ($\overrightarrow{M'O},\overrightarrow{M'M}$) vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (π), donc que $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IO})=\dfrac{\pi}{2}$ (π) et donc que le point A est sur le cercle C. Le point O est exclus $(a=0!)$ et le point I aussi car la valeur de l'angle est alors 0.

si $x\in\mathbb{R}$ alors l'affixe xa du point M' a le même argument que a : O, A et M' sont alignés. Si de plus A est sur le cercle C, OMM' rectangle montre que M' est le projeté orthogonal de M sur OA.

III 1) a) déterminer a et b revient à effectuer la division du polynôme $z^3+4\,z^2+2\,z-28$ par le monôme $z-2$; il vient $z^3+4\,z^2+2\,z-28=(z-2)(z^2+6\,z+14)$ donc $\boxed{a=6\text{ et }b=14}$

b) les 3 solutions de (E) sont $z=2$ et les racines de $z^2+6\,z+14$,

celles-ci s'écrivent $\dfrac{-6\pm 2\,i\sqrt{5}}{2}$ donc (E) a pour solutions $\boxed{2\,,\,-3+i\sqrt{5}\text{ et }-3-i\sqrt{5}}$

2) a) si $z=x+iy$ alors $\bar{z}=x-iy$; $z^2=x^2-y^2+2\,ixy$ et enfin $\bar{z}^2=x^2-y^2-2\,ixy$.
L'égalité proposée $z^2-4=4-\bar{z}^2$ s'écrit donc $(x^2-y^2-4)+2\,ixy=4-(x^2-y^2-2\,ixy)$ d'où $\boxed{x^2-y^2=4}$

b) Vérifions
pour A : $x=2\;\; y=0,\; x^2-y^2=4$ donc $A\in(H)$
pour B : $x=-3\;\; y=-\sqrt{5},\; x^2-y^2=9-5=4$ donc $B\in(H)$
pour C : $x=-3\;\; y=\sqrt{5},\; x^2-y^2=9-5=4$ donc $C\in(H)$

3) a) La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ s'exprime par la relation $z'=e^{\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}z$ établie entre z' affixe de M' et z affixe de M. Soit $z'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)\,z$. Appliquée à A, B et C cela donne $\boxed{z_{A'}=\sqrt{2}(1-i)}$ $\boxed{z_{B'}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-3-\sqrt{5}-i(3+\sqrt{5})\right)}$ et $\boxed{z_{C'}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-3+\sqrt{5}+i(3+\sqrt{5})\right)}$

A' est sur la seconde diagonale, B' et C' sont symétriques par rapport à cette seconde diagonale.

b) On a donc $(x'+iy')=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)(x+iy)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+y+i(y-x))$

d'où les deux égalités $x'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+y)$ et $y'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(y-x)$;

il en résulte que $x'y'=\left(\frac{1}{2}\right)(y^2-x^2)$.;

par conséquent $\boxed{M\in(H)\Leftrightarrow x^2-y^2=4\Leftrightarrow x'y'=-2}$

4) Merci *Geogebra* !