En classe de 2de, lions deux chapitres clefs, «fonctions de base» et «équation de droite»

Nous savons écrire l'équation d'une droite passant par deux points A et M donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé. Que se passe-t-il si ces deux points sont sur une courbe donnée ?

Supposons la courbe donnée comme le graphe d'une fonction $x \to f(x)$.
Alors le point A est en $(a, f(a))$ pour un certain réel a. Nous le fixons.
Le point M se trouve lui en $(x_{\mathrm{M}}, f(x_{\mathrm{M}}))$, posons $x_{\mathrm{M}}=a+h$, alors $y_{\mathrm{M}}=f(a+h)$

Le coefficient directeur de la droite (AM) est ainsi égal à $\dfrac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

a) cas de $x \to x^2$.

La courbe est une parabole d'axe Oy.

Le coefficient directeur est $\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$, que l'on développe en $\dfrac{2ah+h^2}{h}=2a+h$

b) cas de $x \to \dfrac{1}{x}$

La courbe est une hyperbole équilatère dont les axes sont asymptotes.

Le coefficient directeur de (AM) est $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\dfrac{a-a-h}{h(a+h)a}=-\dfrac{1}{a(a+h)}$

c) cas de $y=\sqrt{x}$

La courbe est une demi-parabole d'axe Ox.

Le coefficient directeur est $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$: on multiplie «haut et bas» par $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$:

Il vient $\dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

Une expérience de pensée

Dans tous ces calculs nous n'avons pas donné de condition sur h. Bien sûr *a priori* ce nombre n'est pas nul (pour que A et M soient deux points distincts de la courbe). Mais le calcul est valable pour toute valeur de h, positive ou négative, de valeur absolue aussi petite que l'on veut. Nous pouvons ainsi imaginer les droites D_h tracées pour h prenant différentes valeurs (même très petites). Comme les fonctions envisagées ont des graphes «continus» et «sans trous» ces droites se rassemblent autour de la droite qui touche la courbe en A, sans autre point commun avec elle : c'est la tangente en A à la courbe. «Donc» cette tangente n'est autre que D_0 ! Faisons donc $h=0$ dans les résultats ci-dessus[1] :

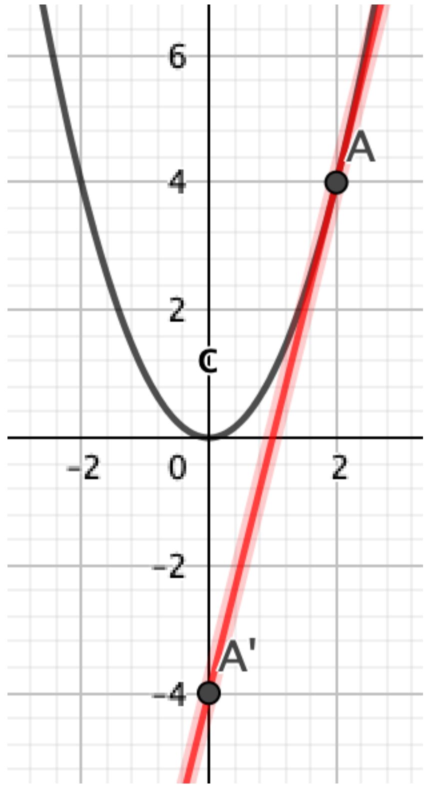
le coefficient directeur de la tangente à la parabole $y=x^2$ au point (a, a^2) est donc $2a$

celui de la tangente à l'hyperbole $y=\dfrac{1}{x}$ au point $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ est $-\dfrac{1}{a^2}$

et celui de la tangente à $y=\sqrt{x}$ en $(a, \sqrt{a})$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

1 Ces nombres recevront une définition précise en classe de première, sous le nom de “nombre dérivé de f en a “

Appliquons ce que nous savons des droites

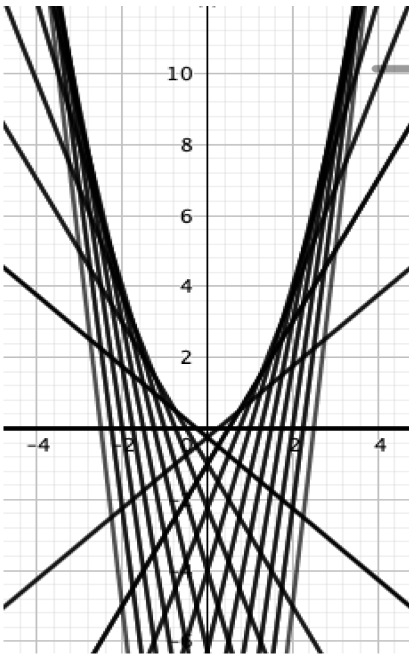


Pour la parabole $y=x^2$ la droite D_0 a pour coefficient directeur $2a$ et elle passe en $\mathrm{A}=(a,a^2)$,

donc une équation en est $y-a^2=2a(x-a)$
soit en développant $y=2ax-a^2$
Son ordonnée à l'origine est donc $-a^2= -y_{\mathrm{A}}$

Pour tracer la tangente à la parabole, on prend le symétrique du point $(0,a^2)$ qui a l'ordonnée de A, soit le point A′ $(0,-a^2)$ par lequel la tangente passe.

Le point d'intersection de D_0 avec l'axe Ox est en $\left(\frac{a}{2},0\right)$

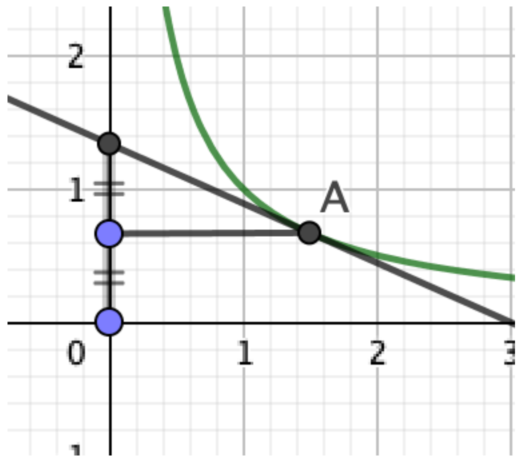


Avec la fonction « curseur » de Geogebra il est possible de tracer ces droites $y=2ax-a^2$ pour a variant de -5 à 5 par exemple.

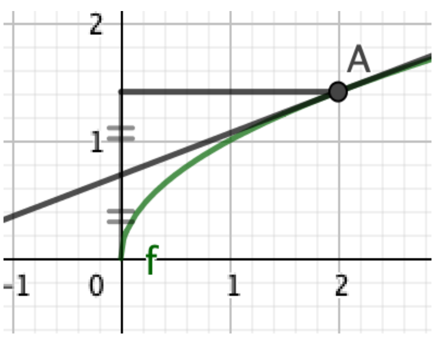
Si nous demandons que cette droite D_0 laisse sa trace, nous verrons apparaître la parabole comme «enveloppée» de ces droites tangentes. Sans même que nous en ayions demandé le tracé.

Le cas de l'hyperbole donne pour D_0 le coefficient $-\frac{1}{a^2}$ et donc

l'équation de D_0 $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$ soit $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$



Cette fois ci le point $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ est le symétrique de O par rapport au point $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ et la construction est tout aussi simple que pour la parabole. Le point d'ordonnée 0 sur D_0 a pour abscisse $-\frac{2}{a}/\left(-\frac{1}{a^2}\right)$ soit $2a$



Enfin la droite tangente en A

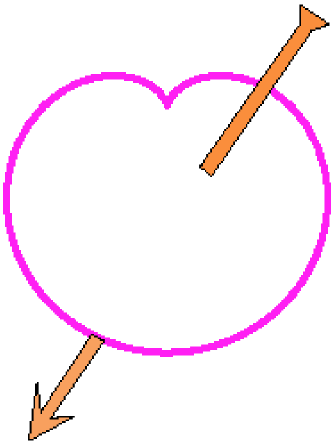
à la courbe de $\sqrt{x}$ a pour équation $y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$

soit $y=\frac{x}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{2}$

L'ordonnée à l'origine est la moitié de l'ordonnée de A et nous pouvons aussi aisément tracer cette tangente.

Pas de surprise : la courbe est une demi-parabole... et le point de D_0 d'ordonnée 0 est $(-a,0)$

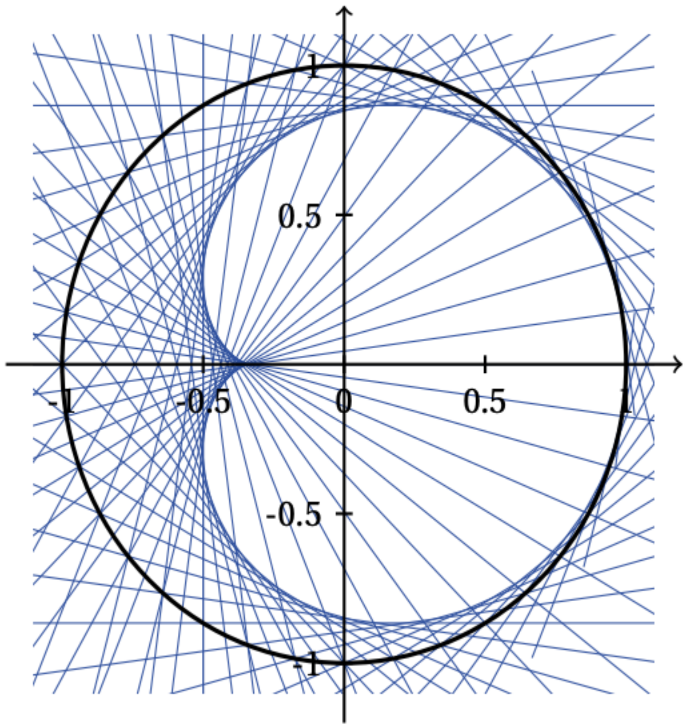
Un exemple classique de courbe « enveloppe de droites » : la Cardioïde.



On peut définir la courbe en forme de cœur ci-contre de (très) nombreuses façons.

Une de ces façons est de tracer des cordes de cercle, une des extrémités décrivant le cercle deux fois plus vite (encore ce nombre 2!) que l'autre.

http://mickaelprost.fr/docs/coursexos/courbes.pdf



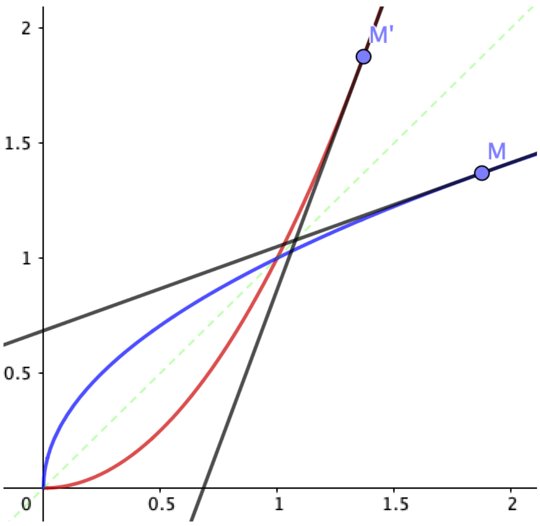
CARDIOÏDE ET ENVELOPPE DE CORDES DE CERCLE

https://mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml
Courbe étudiée par Rømer en 1674, Vaumesle en 1678, La Hire en 1708 et Castillon en 1741. Le nom, donné par Castillon en 1741, provient du grec kardia "coeur".

Le tracé montre les cordes en bleu et le cercle en noir. La cardioïde n'a pas été tracée et apparaît comme enveloppe.

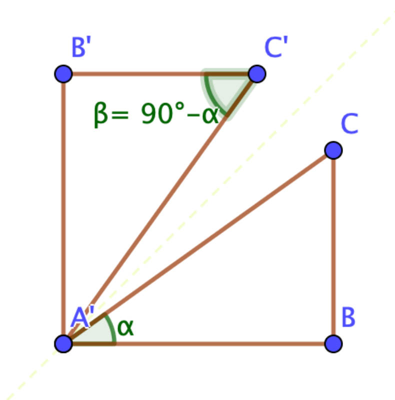
Un peu de géo(trigonométrie !

Sur $[0,+\infty[$ les graphes de $x\rightarrow x^2$ et de $x\rightarrow\sqrt{x}$ sont des moitiés de parabole symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe $y=x$ (première bissectrice des axes)



Les tangentes en M à $C_{\sqrt{x}}$ et en M' à C_{x^2} sont donc aussi symétriques par rapport à la droite $y=x$.

Or le coefficient directeur d'une droite est égal à la tangente de l'angle qu'elle forme avec Ox : rapport $\dfrac{BC}{AB}$ pour (AC) et celui de la droite symétrique par rapport à $y=x$, $(A'C')$ est l'inverse de ce rapport,



$\dfrac{A'B'}{B'C'}=\dfrac{AB}{BC}$. On a donc $x_M=y_{M'}=a$, $x_{M'}=y_M=\sqrt{a}$ et le coefficient directeur de la tangente en M' à C_{x^2} vaut $2\sqrt{a}$ alors que celui de la tangente en M à $C_{\sqrt{x}}$ vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Cette constatation, qui est résumée en $\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan(90°-\alpha)}$, vaut pour tout couple de courbes symétriques par rapport à la première bissectrice (fonctions réciproques).