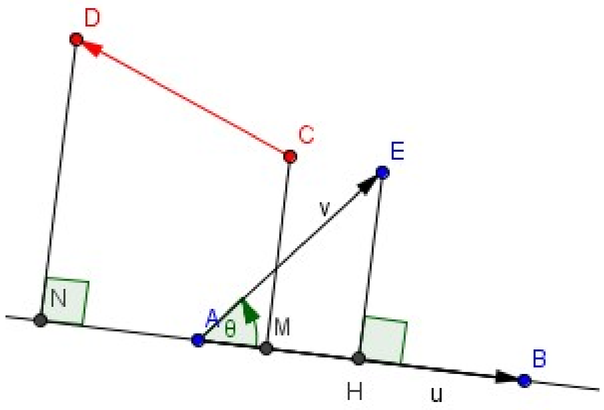
Géométrie. Fiches pour préparer le Bac S

I Rappels sur le produit scalaire (dans le plan et l'espace)

a) Définitions (toutes équivalentes)



si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$; $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$ alors en notant . le produit scalaire,

on a $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\text{ x }\|\vec{v}\|\cos\theta}$ avec $\theta=(\vec{u},\vec{v})$

et $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}$

ainsi que, si la notation $\overline{IJ}$ désigne la mesure *ALGEBRIQUE* du segment IJ (la distance, mais avec le signe) :

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{AB}\text{ x }\overline{AH}}$ et $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{w}=\overline{AB}\text{ x }\overline{MN}}$

où H désigne le projeté orthogonal de E sur la droite (AB),
M et N projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB)

Enfin, si dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs orhogonaux les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) sont (x,y) (resp. (x',y')), alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$ En effet on a l'équivalence logique fondamentale suivante : $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Rajoutez zz' en trois dimensions !

b) Propriétés

		$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$	
$\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=AB^2\geqslant 0$	$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (commutativité)	$\forall k\in\mathbb{R}\ \vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\vec{u}\cdot\vec{v}$ (associativité)	$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distributivité)
$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2}$	$\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$	$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

c) Equation d'un cercle, d'une sphère

Comme le cercle de diamètre AB, avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, l'équation de ce cercle est $\boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$ Le même raisonnement donnera, en 3 dimensions, l'équation d'une sphère déterminée par un de ses diamètres.

d) Distances

L'équation d'une droite (d) dans le plan : $ax+by+c=0$ et celle d'un plan dans l'espace $ax+by+cz+d=0$ s'interprètent de la même façon, et ce de plusieurs points de vue :

- Le vecteur $\vec{n}=(a,b)$ (resp. (a,b,c)) est normal à la droite (resp. le plan). Le troisième (quatrième) coefficient se détermine à l'aide d'un point particulier : une droite (un plan) est totalement déterminé(e) si l'on connaît sa direction et un de ses points.
- La valeur $ax+by+c$ (resp. $ax+by+cz+d$) est négative pour un des deux demi-plans (resp. demi-espaces) définis par la droite (le plan) et positive pour l'autre.
- Toutes les droites (plans) ayant les mêmes coefficients (a,b) (resp. (a,b,c)) sont parallèles (direction de droite, de plan = direction orthogonale au vecteur normal). Et la droite (le plan) reste identique si l'on multiplie tous les coefficients par une *même* valeur.
- Soit A un point, appelons H son projeté orthogonal sur la droite (le plan). Il est clair que $\overrightarrow{HA}$ est colinéaire à $\vec{n}$. Comme ses coordonnées sont $(x_A-x_H,\ y_A-y_H)$ le produit scalaire $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}$ vaut $a(x_A-x_H)+b(y_A-y_H)$ soit $ax_A+by_A-(ax_H+by_H)$ (rajoutez le troisième terme dans le cas du plan). Mais comme $H\in(d)$, $ax_H+by_H=-c$ et donc $\vec{n}.\overrightarrow{HA}=ax_A+b_{y_A}+c$. Par ailleurs ce produit scalaire est celui de deux vecteurs colinéaires : $\cos(\theta)=\pm 1$; donc il est égal à $\pm\|\vec{n}\|\cdot\|\overrightarrow{AH}\|$; le signe est celui correspondant au demi-plan (-espace) dans lequel se trouve A et la distance de A à (d) (resp. (P)) est donc égale à $\pm\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{HA}}{\|\vec{n}\|}$ soit $d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; ajoutez la troisième coordonnée dans le cas de l'espace et d'un plan.