La pente est rude, prenons la tangente ! Parabole mathématique

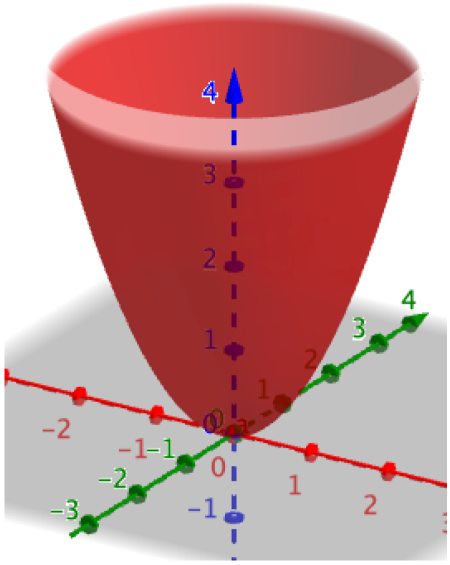
Préambule. Je pense depuis longtemps qu'à force de mettre, dans les programmes scolaires, les notions fondamentales «en cases», on passe à côté de beaucoup de raccourcis didactiques que les grands anciens auraient sans doute appréciés. J'en présente un ici, muri grâce à la rencontre d'un jeune éléve accompagné de sa troisième à son baccalauréat. On y découvrira comment retrouver le «truc» d'Archimède incendiant la flotte romaine à Syracuse, avec quelques outils «institutionnellement corrects» des classes de collège et de lycée, juste un peu plus poussés que d'habitude.

Le «truc»

En seconde, dans le programme, figure au chapitre «fonctions de base» la fonction $x \to x^2$ et son graphe $\mathcal{P}$ qui est une parabole d'axe $x=0$.

Avec un logiciel de tracé, nous allons définir le point $\mathrm{A}= \left(a, a^2\right)$ qui est sur la courbe $\mathcal{P}$.

Puis la tangente T à $\mathcal{P}$ en ce point A, et la droite N perpendiculaire à T passant par A. Cette droite est appelée *normale* à la courbe en A.



Un chouia de physique.
Imaginons que notre courbe est la section suivant son axe d'une surface de phare automobile telle que ci-contre. Et que cette surface recoit des rayons solaires parallèles à l'axe de symétrie (soleil suffisamment loin pour considérer qu'il est à l'infini).

Un rayon solaire est représenté par la demi-droite verticale passant par A.

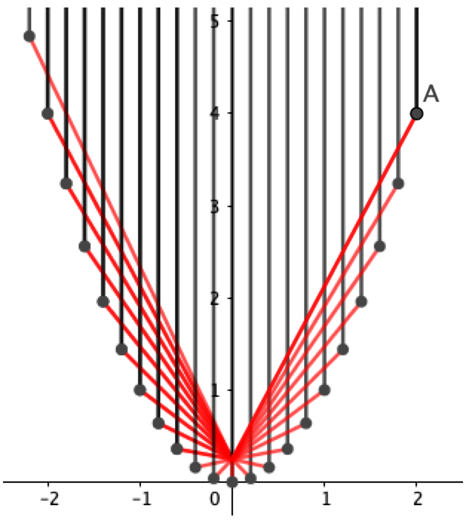
Comment se réfléchit-il ?

Descartes a donné la solution : le rayon qui arrive fait avec la droite *normale* un angle (dit *incident*) et le rayon réfléchi fera le même angle avec la *normale.*

Nous pouvons donc continuer la figure en traçant ce rayon par symétrie.

Faisons alors varier *a* donc la position de A sur la courbe $\mathcal{P}$: le rayon réfléchi passe par un point fixe.

Archiméde savait cela, et il savait créer une surface parabolique assez simplement. Aussi a-t-il pu concentrer les rayons solaires en un point, et cette concentration est telle que le bois prend feu. Il aurait ainsi incendié la flotte romaine devant Syracuse. Du moins c'est le récit qui nous est parvenu, même s'il reste sujet à caution.



Mais le fait est établi : les rayons parallèles à l'axe de la parabole sont tous réfléchis en direction d'un seul point ! Et il est donc naturel de nommer ce point le *foyer* de $\mathcal{P}$.

Créer une surface parabolique n'est pas si difficile : placer un liquide dans un récipient ayant un axe, et faire tourner celui-ci autour de cet axe. Les opérateurs de DCA de la seconde guerre mondiale ont fait cela tès souvent, avec du mercure ; en plaçant une source de lumiére au foyer, ils obtenaient un faisceau de rayons paralléles pour repérer les avions ennemis.

Plus d'infos ici http://serge.mehl.free.fr/anx/miroirpara.html

La question «pédagogique»

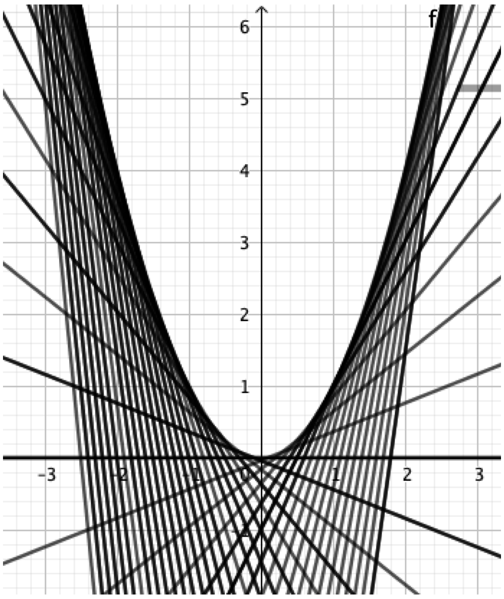
Si notre objectif ne se limite pas à la découverte de cette propriété, largement utilisée avec les antennes satellite, mais comporte le sous objectif d'une démonstration, et que nous sommes au niveau de la classe de seconde, avons nous les outils suffisants pour cela ?
Après tout, il y a des droites, et nous savons établir leurs équations dans cetaines conditions. Mais si nous nous contentons du programme, hélas, la réponse est non. Pourtant....

Les droites, objets géométriques.

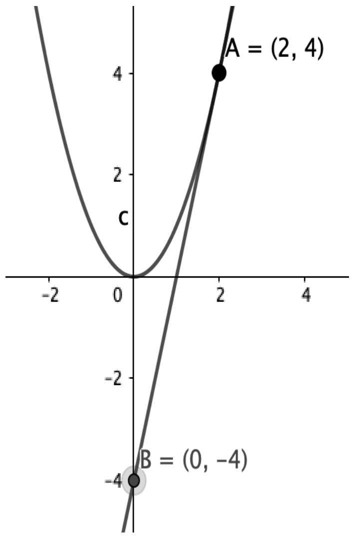
Droite passant par deux points de $\mathcal{P}$ (corde de la parabole)

Prenons pour points de $\mathcal{P}$ le point $\mathrm{A}(a, a^2)$ et, pour h non nul, le point M d'abscisse $a+h$: il a pour coordonnées $(a, (a^2+2ah+h^2))$. Le coefficient directeur de la droite (AM) qui vaut $\dfrac{y_\mathrm{M}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M}-x_\mathrm{A}}$ est donc égal à $\dfrac{2ah+h^2}{h}=2a+h$. Son équation est $y=(2a+h)(x-a)+a^2=(2a+h)x-a^2$

Droite tangente à $\mathcal{P}$ au point A



C'est une corde telle que A et M sont confondus, donc elle est obtenue pour $h=0$ et $\mathrm{T_A}: y=2ax-a^2$ est son équation.

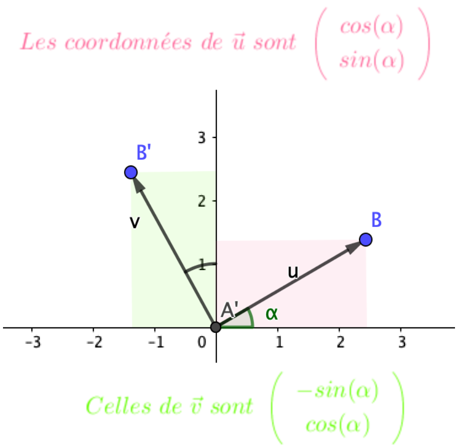


Si nous traçons ces droites en faisant varier le nombre a, la parabole $\mathcal{P}$ apparaît comme *enveloppée* par ces droites, comme ci-contre à gauche.

L'ordonnée à l'origine de $\mathrm{T_A}$ est $-a^2$ donc il est facile connaissant le point A de tracer la tangente : puisque $y_\mathrm{B}=-y_\mathrm{A}$ nous prenons le symétrique par rapport à l'origine du point $(0, a^2)$, soit B, et la tangente en A est la droite (AB).

On retient que son coefficient directeur vaut $2a$ (en Première on nommera ce nombre grâce à la notion de *dérivée*)

Droite normale à $\mathcal{P}$ en A



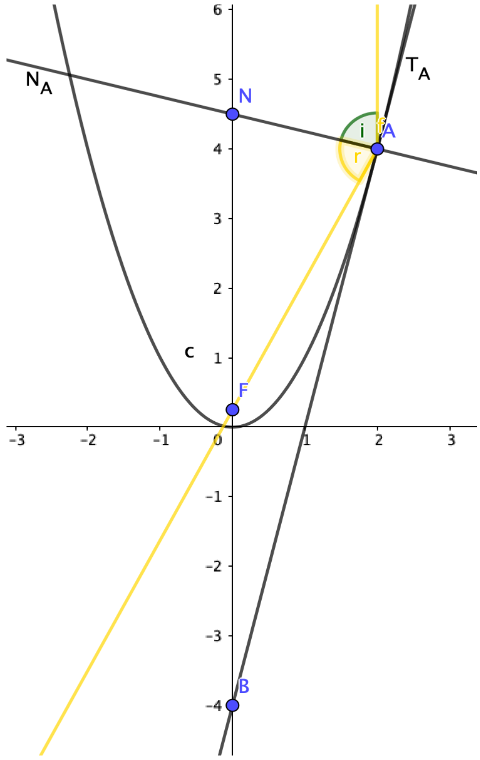
c'est donc la perpendiculaire à $\mathrm{T_A}$ qui passe par A. Nous devons donc, pour aller plus loin, nous intéresser à la relation liant les coefficients directeurs de 2 droites perpendiculaires.

Sur le schéma ci-contre la droite (AB) dirigée par $\vec{u}$ a pour coefficient directeur $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ soit $\tan(\alpha)$. Pour passer au vecteur $\vec{v}$ on a échangé les coordonnées de $\vec{u}$ et changé le signe du sinus. Ainsi le coefficient directeur de la droite (AB') est égal à $\dfrac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)}=-\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$: le produit des coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires vaut donc -1. Cette relation est vérifiée pour toutes les valeurs possibles de α.

Elle peut aussi s'exprimer comme $\tan(90°+\alpha)=-\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$ *(cf infra)*

Ainsi le coefficient directeur de $\mathrm{N_A}$ *normale* à $\mathcal{P}$ en A vaut donc $-\dfrac{1}{2a}$. Cette droite forme un angle avec Ox dont la tangente est $-\dfrac{1}{2a}$. Comme elle passe en A son éqution s'écrit $y-y_\mathrm{A}=\left(-\dfrac{1}{2a}\right)(x-x_A)$ ce qui mène puisque $y_\mathrm{A}=a^2$, à $y=\left(-\dfrac{1}{2a}\right)x+\dfrac{1}{2}+a^2$. Examinons les ordonnées à l'origine des deux droites $\mathrm{T_A}$ et $\mathrm{N_A}$: $-a^2$ et $a^2+\dfrac{1}{2}$. Leur demi somme est $\dfrac{1}{4}$ et ne dépend pas de a. Si nous pouvons prouver que le rayon réfléchi passe par ce point milieu $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ nous aurons fini la démonstration.

Le retour du triangle rectangle



Sur la figure ci-contre on a construit les deux droites T_A et N_A

Le point milieu de $[BN]$ est $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et par construction le triangle NAB est rectangle en A . Il en résulte que les angles $\widehat{FAB}$ et $\widehat{FBA}$ sont égaux puisque F est le centre du cercle de diamétre NB qui passe par A, donc que FAB est isocéle de sommet F.

Or l'angle $\widehat{FBA}$ est égal à l'angle formé par le rayon solaire et T_A , car (FB) est verticale comme le rayon incident, ce qui donne deux angles de T_A avec la direction verticale. Or cet angle entre T_A et la verticale est complémentaire de l'angle d'*incidence* noté i

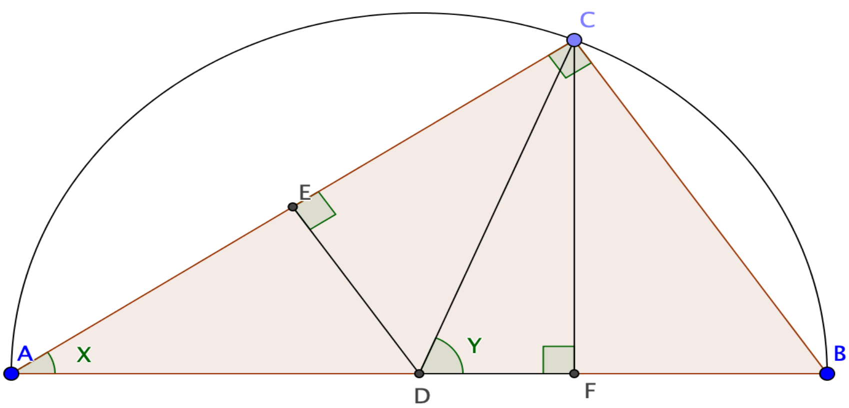
De même l'angle $\widehat{FAB}$ est complémentaire de l'angle de *réflexion* noté r , puisque leur addition donne l'angle droit $\widehat{NAB}$.

Le point F est donc commun à tous les rayons réfléchis par le miroir parabolique.

Oui, mais... l'équation du rayon réfléchi ?

Le *sinus* et le *cosinus* d'un angle entre 0° et 90° ont été définis grâce au triangle rectangle. Ces définitions par la géométrie et les mesures de côtés montrent, ne l'oublions jamais, que le *sinus* d'un angle est le *cosinus* de son complémentaire, et réciproquement, le côté ADJascent à l'un étant OPPosé à l'autre. Cela permet de conforter l'égalité de $\tan(90° - \alpha)$ avec l'inverse $\frac{1}{\tan(\alpha)}$, parfois appelé *cotangente* de α .

Dans cette figure, l'angle Y est le double de l'angle X
car D, milieu de AB, est le centre du demi-cercle. On choisira le rayon comme unité de longueur.



Ainsi on aura AD=DC=DB=1 et donc (dans ABC) AC=2cos(x) puis (dans ACF) AF=ACcos(x)=2cos²(x)
Donc comme (dans DFC) cos(2x)=DF, et que DF=AF−1, on obtient l'expression

$$cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)$$

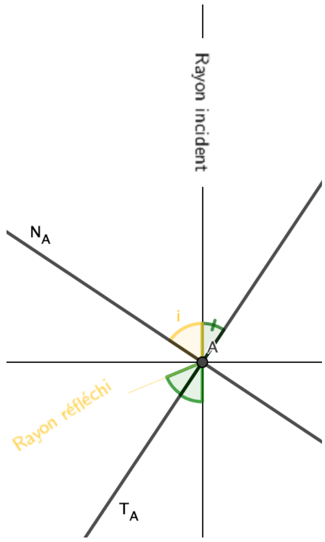
Par ailleurs, on peut calculer l'aire de ABC comme AC*BC/2 soit (2cos(x))(2sin(x))/2, ou 2sin(x)cos(x),
mais aussi comme AB*CF/2 soit comme (dans CDF) AF=sin(2x), 2*sin(2x)/2

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

Si nous poussons le raisonnement grâce à la figure ci-dessus, nous obtenons la formule donnant la tangente du double d'un angle ; en effet nous aurons $\tan(2x) = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

Si nous divisons le numérateur par $\cos^2 x$, il devient $2\tan x$. Si nous divisons le dénominateur par le même nombre, il devient $1 - \tan^2 x$. Ainsi $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Regardons les angles autour du point A : les angles de même couleur sont égaux, et l'angle entre N_A et le rayon réfléchi (angle de réflexion) est égal à l'angle i



Nous connaissons la tangente de l'angle vert marqué : comme T_A a pour coefficient directeur 2a, la tangente du complémentaire de l'angle formé par T_A avec Ox est $\frac{1}{2a}$. La formule ci dessus va donc donner la tangente de l'angle entre la verticale et le rayon réfléchi, qui vaut 2 fois l'angle vert marqué. Et finalement l'angle $A?$ formé par le rayon réfléchi et l'horizontale est le complémentaire, donc sa tangente est l'inverse.

Résumons : l'angle dont la tangente est le coefficient directeur du rayon réfléchi est le complémentaire du double de l'angle dont la tangente est $\frac{1}{2a}$.

La tangente de cet angle double se calcule par la formule, et on prend l'inverse du résultat pour avoir la tangente du complémentaire.

Il vient que $\tan(A?) = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2a}\right)^2}{\frac{2}{2a}} = \dfrac{4a^2-1}{4a} = a - \dfrac{1}{4a}$

Nous avons donc déterminé que l'équation du rayon réfléchi est celle d'une droite de coefficient directeur $a-\frac{1}{4a}$ qui passe par $A(a, a^2)$, elle s'écrit donc $y-a^2=\left(a-\frac{1}{4a}\right)(x-a)$ soit $y=\left(a-\frac{1}{4a}\right)x+\frac{1}{4}$.

Le point $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ est donc commun à tous ces rayons réfléchis.

Une autre propriété (connue des anciens)

La distance AF, où $A=\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ se calcule par son carré qui vaut $a^2+\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2 = a^4+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{16}$

On remarque donc que $AF^2=\left(a^2+\frac{1}{4}\right)^2$ donc $AF=a^2+\frac{1}{4}$ ne dépend que de A, le point A est donc équidistant de F et du point $\left(a, -\frac{1}{4}\right)$ qui parcourt la droite $y=-\frac{1}{4}$. Celle-ci est la *directrice* de la parabole, qui apparaît donc comme le lieu des points équidistants d'une droite et d'un point.

Les autres courbes *coniques* (ainsi appelées parce qu'elles sont les intersection d'un plan et d'un cône) que sont l'*ellipse* et l'*hyperbole* ont des définitions géométriques également : somme des distances d'un point à deux foyers F_1 et F_2 constante, pour l'ellipse, différences de ces distances pour l'hyperbole.
On en saura plus et on ira plus loin avec http://villemin.gerard.free.fr/Geometri/Coniques/Coniques.htm

Et pour une parabole quelconque ?

On verra en Première que le graphe de la fonction trinôme $x \rightarrow ax^2+bx+c$ est une parabole d'axe $x=-\frac{b}{2a}$

Son sommet est le point $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ et son foyer sera en $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$