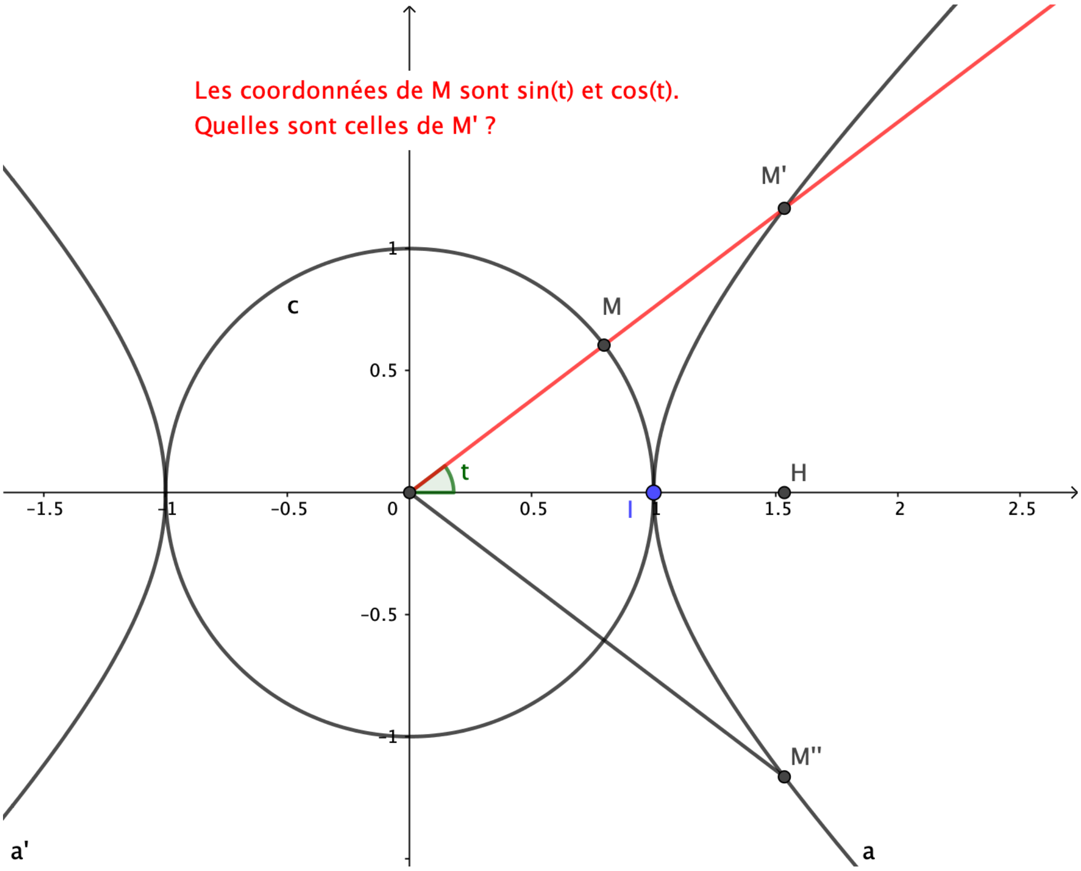
Un probléme géométrique... résolu algébriquement



Remarques préliminaires

Le cercle trigonométrique a pour équation $x^2+y^2=1$

La courbe (a,a') est une hyperbole équilatére (asymptotes $y=\pm x$) dont l'équation est $x^2-y^2=1$

Le point M est en $(\cos t,\sin t)$.

Si l'on cherche à exprimer M' par deux fonctions $(c(u),s(u))$, celles-ci seront telles que $c(-u)=c(u)$ (c est paire) et $s(-u)=-s(u)$ (s est impaire).

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ se décompose d'une manière unique en somme d'une fonction paire $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et d'une fonction impaire $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Calcul d'aires.

L'aire du secteur de disque OIM vaut $\dfrac{t}{2}$ si t est donné en radians. (si t=0 elle est nulle et si t=2 π elle vaut π)

Evaluons l'aire du «triangle curviligne» OIM' : c'est l'aire de OHM' à laquelle on ote l'aire sous l'hyperbole.

Or l'aire de OH'M vaut $\dfrac{c(M)s(M)}{2}$ et l'aire sous l'hyperbole vaut $\int_1^{c(M)}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x \;=\mathrm{A}(M)$

Un appel à Xcas ou au site dCode donne une primitive de $\sqrt{x^2-1}$ comme $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$

Il vient que $\mathrm{A}(M)=\dfrac{c(M)s(M)}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(s(M)+c(M))$ et donc que l'aire recherchée, vaut $\dfrac{\ln(s(M)+c(M))}{2}$

On aura donc, en appelant u l'aire délimitée par OM' , OM'' et l'hyperbole, $s(\mathrm{M})+c(\mathrm{M})=\mathrm{e}^{o}$

Or les parties *paire* et *impaire* de e^u , qui sont par construction $\dfrac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}{2}$ sont uniques. Il en résulte que $\boxed{s(\mathrm{M})=\dfrac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}{2}}$ et $\boxed{c(\mathrm{M})=\dfrac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}}$; On les appelle «naturellement» cosinus $\boxed{(\cos h)}$ et sinus $\boxed{(\sin h)}$ hyperboliques de u . Et l'aire OIM' qui nous a servi vaut $\dfrac{u}{2}$, beau parallèle avec sin , cos et l'aire $\dfrac{t}{2}$

La trigonométrie de l'hyperbole

Nous avons donc « découvert »

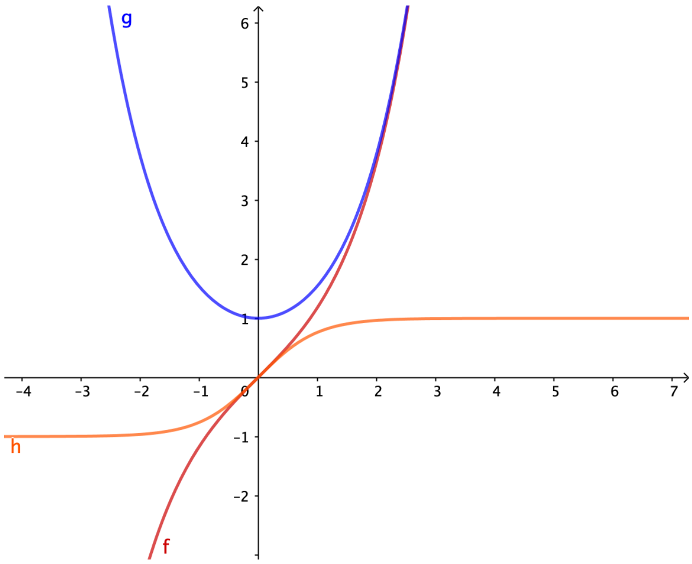
$$\boxed{\mathrm{sh}(t)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{ch}(t)=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}}$$

$$\text{et } \boxed{\mathrm{sh}^2 t+\mathrm{ch}^2 t=-1}$$

nous poursuivons l'analogie en définissant

$$\boxed{\mathrm{th}(t)=\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}}$$

Voici leurs graphes :



Le calcul des dérivées montre que :

la dérivée de $\mathrm{sh}(t)$ est $\mathrm{ch}(t)$: *sh* croît

celle de $\mathrm{ch}(t)$ est $\mathrm{sh}(t)$: *ch* décroît puis croît.

On dérive $\mathrm{th}(t)$ comme un quotient pour trouver que

la dérivée de $\mathrm{th}(t)$ vaut $\dfrac{\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^2 t}=-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}=1-\mathrm{th}^2 t$: $\mathrm{th}(t)$ est strictement croissante de -1 à $+1$

sh et *th* sont des bijections, elles ont donc chacune une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$

La réciproque de *ch* ne sera définie que sur l'ensemble image, qui est $[1,+\infty[$

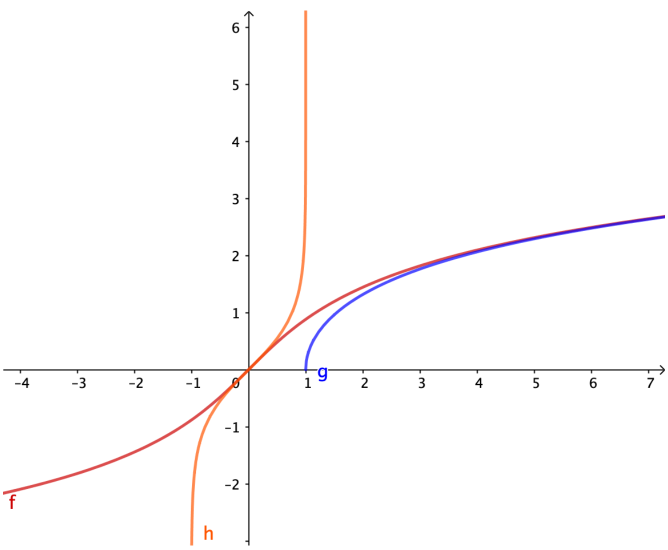
Si $y=\mathrm{sh}(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ alors $2ye^{x}=e^{2x}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} X=e^{x} \\ X^2-2yX-1=0 \end{cases}$ Le trinôme en X a pour Δ $4(y^2+1)$ et

posséde dont toujours 2 racines $\begin{cases} X_1=y+\sqrt{1+y^2} \\ X_2=y-\sqrt{1+y^2} \end{cases}$ et donc $x=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ car seule X_1 est toujours >0

On aura donc $\boxed{Argsh(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$ définie sur $\mathbb{R}$ dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Si $y=\mathrm{ch}(x)$ alors $\begin{cases} X=e^{x} \\ X^2-2yX+1=0 \end{cases}$ Cette fois Δ vaut $4(y^2-1)$ et comme $y=\mathrm{ch}(x)>1$

il y a deux racines $\begin{cases} X_1=y+\sqrt{y^2-1} \\ X_2=y-\sqrt{y^2-1} \end{cases}$ donc $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$ car seule X_1 est positive.



On aura donc $\boxed{Argch(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

définie sur $[1,+\infty[$ dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Si $y:\mathrm{th}(x)$ on a $y(e^{2x}+1)=(e^{2x}-1)$

donc $(1-y)e^{2x}=1+y$ d'où $2x=\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$

Il vient $\boxed{Argth(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$ définie sur $\mathbb{R}$

dérivée $\dfrac{1}{1-x^2}$