Chapitre	:	Autour du Nombre Pi
Classes	:	Terminales S et Sciences Math
Proposé par	:	Bobby NGUYEN (bobby.nguyen@free.fr)

- Construction du nombre π et des fonctions circulaires.
- Etude de fonction, limites, parité, bijection.

Vous allez faire dans ce problème comme si vous ignoriez complètement le nombre π et les fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente, ainsi que leurs réciproques arcsinus, arccosinus et arctangente. Tout résultat supposant l'existence de ces objets est interdit d'usage car l'objectif de ce problème est justement d'en proposer une construction.

Pour que vous ne soyez pas tentés d'utiliser des propriétés que vous connaissez sans vous en apercevoir, on donnera aux objets introduits ci-après des noms nouveaux (At pour $\arctan$, p pour π, t pour $\tan$ ...)

I – Construction du nombre pi et de la fonction Arctangente

On admet que toute fonction continue sur un intervalle y possède une primitive.

On note alors At l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

1) Limite de At.

   a) Montrer que At est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) Grâce à la fonction $x \mapsto \mathrm{At}(x) + \dfrac{1}{x}$, montrer que At est majorée sur $\mathbb{R}$.

   c) En déduire que la limite de At au voisinage de $+\infty$ existe et est finie.

On pose $\mathrm{p} = 2 \lim\limits_{\infty} \mathrm{At}$

2) Montrer que At est impaire.

3) Montrer que At est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\dfrac{\mathrm{p}}{2}, \dfrac{\mathrm{p}}{2}\right[$.

II – Construction de la fonction Tangente

On note t la réciproque de At sur $\left]-\dfrac{\mathrm{p}}{2}, \dfrac{\mathrm{p}}{2}\right[$. On prolonge ensuite cette fonction en t en une fonction p-périodique définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\mathrm{p}}{2} + \mathrm{p}\mathbb{Z}\right)$.

1) Montrer que t est continument dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\mathrm{p}}{2} + \mathrm{p}\mathbb{Z}\right)$ et calculer t' en fonction de t.

2) Montrer que t est impaire.

3) Déterminer les variations et le signe de t sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi que ses limites aux bornes.

II – Construction des fonctions sinus et cosinus

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{s}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{t}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{t}\left(\frac{x}{2}\right)^2} & \text{si } x \not\equiv \pi \bmod 2\pi \\ 0 & \text{si } x \equiv \pi \bmod 2\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{c}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{t}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1+\mathrm{t}\left(\frac{x}{2}\right)^2} & \text{si } x \not\equiv \pi \bmod 2\pi \\ -1 & \text{si } x \equiv \pi \bmod 2\pi \end{cases}$$

1) Montrer que s et c sont 2π - périodiques.

2) Montrer que $\mathrm{s}^2 + \mathrm{c}^2 = 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que s est impaire et que c est paire.

4) Dérivabilité et continuité de s et de c.
   a) Montrer que s et c sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ et que sur ce domaine : $\mathrm{s}' = \mathrm{c}$ et $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$.
   b) Montrer que s et c sont continues sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que s et c sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, que $\mathrm{s}' = \mathrm{c}$ et $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$.

5) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on note s_u la fonction $t \mapsto \mathrm{s}(t+u)$ et c_u la fonction $t \mapsto \mathrm{c}(t+u)$.
   a) Soient x et y deux réels fixés. Dériver la fonction $\mathrm{s}_x \mathrm{c}_{-y} - \mathrm{c}_x \mathrm{s}_{-y}$ et en déduire que $\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$.
   b) Soient x et y deux réels fixés. Démontrer que $\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$.

6) Montrer que $\mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{c}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

7) Déterminer les variations et le signe de s et c sur $[0, 2\pi]$.

8) Se pencher sur la fonction $\mathrm{At} \circ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}$ et montrer que $t = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}$.