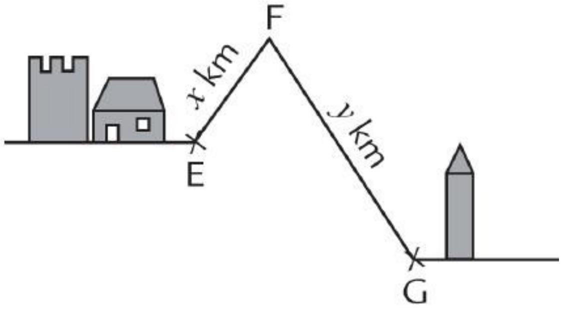
# RÉSOUDRE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES :
## La notion de déterminant

En classe de troisième et en seconde, on apprend à résoudre des problèmes de mathématiques mettant en jeu deux quantités inconnues liées par deux relations affines, ce que l'on peut voir comme la recherche du point d'intersection de deux droites dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Ainsi par exemple (emprunté au CNED, académie en ligne) :

> Aujourd'hui, Nathan a rendu visite, à vélo, à son ami qui habite le village voisin.
>
> Ce matin, il est allé de son village E au village G, en montant une côte [EF], puis en descendant une pente [FG].
>
> En fin d'après-midi, il a fait le trajet inverse.
>
> Il a roulé à 20 km/h en montée et à 30 km/h en descente.
>
> On appelle :
>
> • $x$ la mesure de la longueur de [EF] en km
>
> • $y$ celle de [FG] en km
>
> Le but du problème est de déterminer les distances $x$ et $y$.




Cet énoncé commence en fait par la question ci-contre :

> **Partie 1**
>
> Résous le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 2x + 3y = 31 \end{cases}$

et, bien entendu, la mise en équation du problème posé conduit à ce même système.

**COMMENT RÉSOUT ON UN TEL SYSTÈME D'ÉQUATIONS ?**

Il est d'usage d'enseigner à ce niveau la «**méthode de substitution**» comme ceci :

de la première équation on tire $x=\dfrac{29-2y}{3}$ et l'on reporte cette expression dans la seconde équation en lieu et place du $x$ qui y figure ; il vient que $\dfrac{2(29-2y)}{3}+3y=\dfrac{58-4y}{3}+3y=\dfrac{58}{3}+\dfrac{5y}{3}=31$ d'où l'on déduit que la valeur de $y$ est solution de $5y-35=0$ et donc que $y=7$, partant $x=\dfrac{29-27}{3}=5$

A la rigueur (les programmes ne l'imposent pas) on peut présenter la méthode dite «**d'élimination**» :

en notant $E_1$ et $E_2$ les deux égalités, on éliminera $x$ en calculant l'expression $2E_1-3E_2$ et on éliminera y en calculant $3E_1-2E_2$ ; ce procédé de «combinaison linéaire d'égalités» donne :

$2E_1-3E_2$ : $4y-9y=4\text{x}29-3\text{x}31$ soit $-5y=117-92=-35$ et on retrouve bien $y=7$
$3E_1-2E_2$ : $9x-4x=87-62$ soit $5x=25$ et on retrouve bien $x=5$

> Il faut bien sûr être attentif au fait que les deux équations ne soient pas en fait la même : cas de droites parallèles dans la représentation graphique.

Si l'on écrit le système le plus général ainsi : $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ cela revient à étudier les rapports $\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{b}{d}$, donc la quantité $ad-bc$ (parfois appelée «produit en croix» dans d'autres contextes) : si $ad-bc=0$ deux cas sont possibles :tout couple $(x\,,y)$ est solution (une seule droite !) ou aucun (droites parallèles)

**LA MÉTHODE DES DÉTERMINANTS**

On convient de nommer **déterminant** du système ce nombre $ad - bc$ et on le note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ .ou $det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

*notez que le signe de ce nombre détermine également le sens de variation de la fonction f(x)=(ax+b)/(cx+d)*

Si nous appliquons à ce système le plus général la méthode d'élimination par combinaison des égalités, nous sommes amenés à ceci :

**ÉLIMINER** $y$ par le calcul de la combinaison linéaire $d \cdot E_1 - b \cdot E_2$ donne l'égalité $(ad - bc) \cdot x = de - fb$

ce qui donne directement $x$ comme le quotient $\dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ Remarquer que le numérateur s'obtient en remplaçant dans le déterminant principal la colonne $\begin{cases} a \\ c \end{cases}$ par la colonne $\begin{cases} e \\ f \end{cases}$

**ÉLIMINER** $x$ par le calcul de la combinaison linéaire $c \cdot E_1 - a \cdot E_2$ donne l'égalité $(bc - ad)\, y = ce - af$

ce qui donne directement $y$ comme le quotient $\dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ Remarquer que le numérateur s'obtient en remplaçant dans le déterminant principal la colonne $\begin{cases} b \\ d \end{cases}$ par la colonne $\begin{cases} e \\ f \end{cases}$

Ainsi LA solution UNIQUE lorsque $ad - bc$ n'est pas nul est obtenue par le calcul de 3 déterminants et deux quotients. On obtient le numérateur en remplaçant la colonne des coefficients de $x$ (resp $y$) par celle des seconds membres des équations

Si $ad = bc$ c'est que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = K$ et donc que le système peut s'écrire $\begin{cases} K(cx + dy) = e \\ cx + dy = f \end{cases}$.

On en conclut que si $f = \dfrac{e}{K}$ alors (les deux droites sont confondues) tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ est solution

et que si $\dfrac{e}{f}$ n'est pas égal au quotient $K = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (les droites sont parallèles) aucun $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ n'est solution.

Outre sa rapidité, cette méthode de calcul de la solution présente l'avantage de se généraliser pour plus d'inconnues et autant d'équations. Cette généralisation est la base de nombreux calculs pratiques dont la théorie mathématique constitue l'Algèbre linéaire.

Pour ceux que la curiosité titille, on calcule le déterminant d'un système de 3 équations à 3 inconnues ainsi :

$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = d_1 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = d_2 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$ étant le système, son déterminant est égal à $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

cette méthode est dite «méthode des mineurs» et s'applique aussi bien avec $a_1, a_2$ et $a_3$ multipliés par les déterminants mineurs respectifs : + $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, - $\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$ et + $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

si le déterminant principal $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ n'est pas nul on obtient $x$, $y$, et $z$ comme les quotients :

$$\boxed{x = \dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \text{ et } y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \text{ puis } z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}}$$

Géométriquement il s'agit du point commun à trois plans, et les cas particuliers sont éventuellement à discuter (le discriminant principal est nul) par exemple si 2 des plans sont confondus, les solutions sont sur une droite, etc...)