Autour du nombre π **:** proposition de corrigé pour Mathland

I – Construction de π et Arctangente

1 **a)** La définition de la fonction At comme LA primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ qui s'annule en zéro permet d'écrire :

$At(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et donc $At(x+h) - At(x) = \int_x^{x+h} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Les propriétés de l'intégration permettent d'affirmer que cette expression est du signe de h, parce que la fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est positive. Par conséquent la fonction At est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Appelons g la fonction $At + \frac{1}{x}$; la dérivée de At est, par définition, égale à $\frac{1}{1+x^2}$; la dérivée en x de la fonction g est donc $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}$ soit $-\frac{1}{x^2(1+x^2)}$. Elle est négative pour tout x, donc g est une fonction décroissante. Nous avons donc g, décroissante, somme de At croissante et de $\frac{1}{x}$ décroissante qui tend vers 0, par conséquent At est majorée.

At est donc croissante et majorée, elle admet une limite finie lorsque $x -> +\infty$.

2 Calculons $At(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ en posant $u = -t$: il vient $At(-x) = \int_0^{x} -\frac{1}{1+u^2}\,du = -At(x)$.

La fonction At, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $At(-x) = -At(x)$ est donc bien une fonction impaire.

3 Sur $\mathbb{R}^+$ At est monotone croissante de 0 à $\frac{p}{2}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ et par symétrie de centre O (due à l'imparité) At est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$

II – Construction de la fonction tangente

1 Le mode de définition de t comme réciproque de At permet d'appliquer le théorème de dérivation d'une composée de fonctions, et donc d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \{ p/2 + p\mathbb{Z} \quad t'(x)\, At'(t(x)) = 1$$

Or par définition $At'(t(x)) = \frac{1}{1+t(x)^2}$ donc pour tout x où t est définie, on a $t'(x) = 1 + t(x)^2$

2 Comme At est impaire son graphe est symétrique par rapport au point O. Comme t est la réciproque de At, son graphe est le symétrique du graphe de At par rapport à la première bissectrice $(y = x)$. Par composée de symétries, ce graphe est lui aussi symétrique par rapport à O et la fonction t est donc elle aussi impaire.

3 Pour les mêmes raisons de symétrie, comme At est croissante sur $\mathbb{R}$, t est également croissante sur $\left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$.

Des relations vraies pour At : $x > 0 \Rightarrow 0 < At(x) < \frac{p}{2}$ et $x < 0 \Rightarrow -\frac{p}{2} < At(x) < 0$

on déduit que t est négative sur l'intervalle $\left]-\frac{p}{2}, 0\right[$, positive sur l'intervalle $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ et que $t(0) = 0$.

Par prolongement ces propriétés sont vraies pour les intervalles $\left]-\frac{p}{2} + 2kp, 0\right[$ et $\left]0, \frac{p}{2} + 2kp\right[$.

De même comme $\lim_{x->+\infty} At(x) = \frac{p}{2}$ et $\lim_{x->-\infty} At(x) = -\frac{p}{2}$, on aura $\lim_{x->\frac{p}{2}+2kp} t(x) = +\infty$ et $\lim_{x->-\frac{p}{2}+2kp} t(x) = -\infty$

III – Construction des fonctions sinus et cosinus

1 t est de période p donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $t(x+p) = t(x)$; si t_2 désigne la fonction $x -> t\left(\frac{x}{2}\right)$ alors on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_2(x+2p) = t_2(x)$ ainsi t_2 est 2p-périodique ; d'après les définitions de $s = \frac{2t_2}{1+t_2^2}$ et $c = \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}$ ces deux fonctions sont également 2p-périodiques.

2 Calculons $U=((1+t_2^2)^2)(s^2+c^2)$: $U=4\,t_2^2+(1-t_2^2)^2\ =(1+t_2^2)^2$ donc $s^2+c^2=1$

3 Soit d la fonction $x->1+t_2(x)^2$: elle est définie pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{\frac{p}{2}+p\mathbb{Z}\}$ et on a clairement pour tout x de cet ensemble $d(-x)=d(x)$ De plus pour ces mêmes valeurs de x, on a $t_2(-x)=-t_2(x)$ donc $s(-x)=-s(x)$: s est impaire et de même comme $1-t_2(x)^2=1-t_2(-x)^2$ sur le même domaine, symétrique par rapport à 0, c est une fonction impaire.

4 a) On peut dériver s et c en appliquant le théorème sur la dérivée d'une fonction composée et le calcul de la dérivée du quotient $\frac{u}{v}$ comme $\frac{u'v-v'u}{v^2}$. Ici $u(x)=2\,t\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $u'(x)=2\,\frac{1}{2}\,t'\left(\frac{x}{2}\right)$
et $v(x)=1+t\left(\frac{x}{2}\right)^2$ donc $v'(x)=2\,\frac{1}{2}\,t'\left(\frac{x}{2}\right)t\left(\frac{x}{2}\right)$
on a ainsi : $u'v-v'u=t'\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+t\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)-2\,t'\left(\frac{x}{2}\right)t\left(\frac{x}{2}\right)^2=t'\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-t\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$ mais $t'\left(\frac{x}{2}\right)=1+t\left(\frac{x}{2}\right)^2$ d'après la question II,1. Donc en simplifiant par $1+t\left(\frac{x}{2}\right)^2$ qui n'est jamais nul, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{p+2p\mathbb{Z}\}$, $s'(x)=c(x)$

Sur le même domaine, avec $u(x)=1-t\left(\frac{x}{2}\right)^2$ on aura $u'(x)=-2\,t'\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\,t\left(\frac{x}{2}\right)$ ce qui donne :
$u'v-v'u=-2\,t'\left(\frac{x}{2}\right)t\left(\frac{x}{2}\right)$ et comme $t'\left(\frac{x}{2}\right)=1+t\left(\frac{x}{2}\right)^2$, on a bien : $\forall\, x\in\mathbb{R}\{\frac{p}{2}+p\,\mathbb{Z}$ $c'(x)=-s(x)$

b) lorsque $x->p+2\,kp$, $X=t\left(\frac{x}{2}\right)$ a une limite infinie. Comme s s'écrit $\frac{2\,X}{1+X^2}$ la limite de s est celle de $\frac{2}{X}$ soit 0 qui est également la valeur $s\,(p+2\,kp)$: s est continue en tous ces points.
De même pour c, qui s'écrit $\frac{1-X^2}{1+X^2}$ dont la limite est -1, valeur de $c(p+2\,kp)$ par définition ; c est également continue en tous ces points.
Comme par ailleurs s et c sont, comme quotient, somme et différence de fonctions continues, des fonctions continues sur $\mathbb{R}\backslash\{p+2p\mathbb{Z}\}$, elles sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.

c) Par prolongement, s et c sont donc continuement dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a sur $\mathbb{R}$ s'=c et c'=-s

5 a) notons $\boxed{h(t)}$ la fonction $s_x\,c_{-y}$ - $c_x\,s_{-y}$; en la dérivant par rapport à t (x et y étant des constantes dans ce calcul) et en tenant compte des résultats précédents pour s' et c', on obtient $h'(t)=c(t+x)\,c(t-y)-s(t-y)\,s(t+x)+s(t+x)\,s(t-y)-c(t+x)\,c(t-y)$ soit $h'(t)=0$.

La fonction considérée est donc constante si x et y sont fixés ; on peut écrire $h(0)=h(y)$ par exemple.
or $h(0)=s(x)\,c(-y)-c(x)\,s(-y)=s(x)\,c(y)+c(x)\,s(y)$ en appliquant les propriétés s impaire et c paire ; et $h(y)=s(x+y)\,c(0)-c(x+y)\,s(0)=s(x+y)$ car $c(0)=1$ et $s(0)=0$

On a donc bien $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}$: $s(x+y)=s(x)\,c(y)+c(x)\,s(y)$

b) on reprend le même raisonnement avec comme $h(t)$ la fonction $c_x\,c_{-y}+s_x\,s_{-y}$ dont la dérivée par rapport à t est également nulle. Avec cette nouvelle fonction h, également constante pour x et y fixés, on calcule $h(0)=c(x)\,c(-y)+s(x)\,s(-y)$ et comme c est impaire et s paire, $h(0)$ vaut $c(x)\,c(y)-s(x)\,s(y)$ puis on calcule $h(y)$ qui vaut $c(x+y)\,c(0)+s(x+y)\,s(0)$ soit avec $s(0)=0$ et $c(0)=1$ $h(y)=c(x+y)$; la constance de h pour x et y fixés entraîne donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R} : c(x+y)=c(x)\,c(y)-s(x)\,s(y)$$

6 Si nous prenons $x=y=\frac{p}{2}$ alors les deux relations ci-dessus donnent le système : $\begin{cases} c\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)=c\left(\frac{p}{2}\right)^2-s\left(\frac{p}{2}\right)^2=-1 \\ s\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)=2\,s\left(\frac{p}{2}\right)c\left(\frac{p}{2}\right)=0 \end{cases}$

la seconde égalité est vraie si $s\left(\frac{p}{2}\right)=0$ OU si $c\left(\frac{p}{2}\right)=0$; dans le premiers cas on aurait, en reportant dans le première égalité, $c\left(\frac{p}{2}\right)^2$=-1, ce qui est absurde. C'est donc $c\left(\frac{p}{2}\right)$ qui est nul !.
Et par conséquent $s\left(\frac{p}{2}\right)$ vaut 1 d'après la première égalité ; utilisons ces résultats dans l'expression de $s\left(\frac{3\,p}{2}\right)=s\left(\frac{p}{2}+p\right)$: on a $s\left(\frac{3\,p}{2}\right)=s\left(\frac{p}{2}\right)c(p)+c\left(\frac{p}{2}\right)s(p)=1\,x(-1)+0\,x0=-1$ et comme $s^2+c^2=1$ il vient que $c\left(\frac{3\,p}{2}\right)=\sqrt{(1-(-1)^2)}=0$.

7 Le signe de $s(x)$ est celui de $t\left(\frac{x}{2}\right)$ puisque pour tout x $(1+t(x/2)^2)>0$. Comme t est positive sur l'intervalle $\left]0\,,\frac{p}{2}\right[$, s est positive sur l'intervalle $]0\,,p[$; comme $c'=-s$ la fonction c est décroissante sur ce même intervalle, de $c(0)=\frac{1-t(0)^2}{1+t(0)^2}=1$ à $c(p)=-1$ en passant par $c\left(\frac{p}{2}\right)=0$. De la même manière, comme t est négative sur $\left]-\frac{p}{2}\,,0\right[$ donc sur $\left]\frac{p}{2}\,,p\right[$ par prolongement, la fonction s est négative sur $]p\,,2p[$ et comme $c'=-s$ la fonction c est croissante sur ce même intervalle, de $c(p)=-1$ à $c(2p)=\frac{1-t(p)^2}{1+t(p)^2}=\frac{1-t(0)^2}{1+t(0)^2}=1$ (t est p-périodique).

Ainsi on a le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
signe de c'		$-$		$+$	
c	1 ↘	0 ↘	-1	↗ 0	↗ 1

Ainsi $c(x)$ est positive de 0 à $\frac{p}{2}$ et de $\frac{3p}{2}$ à $2p$, négative entre $\frac{p}{2}$ et $\frac{3p}{2}$. Comme $s'=c$ et que $s(0)=0$, s va croitre de 0 à $s\left(\frac{p}{2}\right)=1$ puis décroitre de 1 à $s\left(\frac{3p}{2}\right)=-1$ (puisque $s^2=1-c^2$ et que $c\left(\frac{3p}{2}\right)=0$ ou bien en calculant $\mathrm{s}\left(\frac{\mathrm{p}}{2}+\mathrm{p}\right)=\mathrm{s}\left(\frac{\mathrm{p}}{2}\right)\mathrm{c}(\mathrm{p})+\mathrm{c}\left(\frac{\mathrm{p}}{2}\right)\mathrm{s}(\mathrm{p})=1\cdot-1+0\cdot0=-1$) en s'annulant en p ; puis elle croitra de nouveau de -1 à $s(2p)=s(0)=0$.

x	0	p/2	p	3p/2	2p
signe de s'	$+$		$-$		$+$
s	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

8 En «se penchant» (sic) sur la composée $I(a)=At\,o\left(\frac{s}{c}\right)(a)$, c'est à dire en utilisant le théorème sur la dérivation d'une fonction composée, nous allons calculer $At'\left(\frac{s(a)}{c(a)}\right)$ et $\left(\frac{s}{c}\right)'(a)$. La première dérivée vaut, par définition, $\frac{1}{1+\left(\frac{s(a)}{c(a)}\right)^2}$ ou $\frac{c(a)^2}{s(a)^2+c(a)^2}$ soit encore $c(a)^2$; la seconde se calcule comme dérivée d'un quotient, et vaut donc $\frac{s'(a)c(a)-c'(a)s(a)}{c(a)^2}$; or l'on sait que $c'(a)=-s(a)$ et $s'(a)=c(a)$; cette dérivée vaut donc $\frac{s(a)^2+c(a)^2}{c(a)^2}$ ou encore $\frac{1}{c(a)^2}$. On a donc la dérivée $I'(a)=1$ pour tout a ce qui entraîne que $I(a)=a+cte$. Et comme $I(0)=At(0)=0$ la constante est 0.

La fonction $\frac{s}{c}$ est donc la fonction réciproque de la fonction At et donc $\forall x\in\mathbb{R}\ t(x)=\frac{s(x)}{c(x)}$