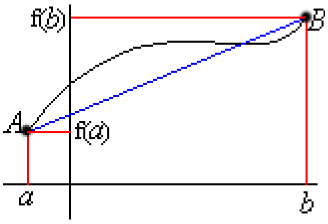
## Méthode des Trapèzes

La méthode d'approximation d'une intégrale ainsi dénommée repose sur le calcul de l'aire d'un trapèze, vue comme l'intégrale d'une fonction affine f sur IR, donc du type :" $f(x) = Ax + B$" , pour tout couple ($a;b$) de réels, on a, comme le montre un calcul sans difficulté particulière :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[A\frac{x^2}{2} + Bx\right]_a^b = (b - a)\times\frac{f(a)+f(b)}{2}\text{ , car } (b^2 - a^2) = (b-a)(b+a)$$

Cette formule d'intégration est à rapprocher de celle qui donne l'aire d'un trapèze, si on interpréte, dans le cas où f est $\geq 0$ sur [$a$ ; $b$], l'intégrale de f comme l'aire du trapéze que définissent :

- la courbe de f,
- l'axe des abscisses
- les deux droites d'équations "$x = a$" et "$x = b$".




*La figure ci-contre montre la courbe de f et l'approximation faite de cette courbe par la droite passant par les points A et B d'abscisses respectives a et b.*

Pour une fonction f quelconque, mais admettant des primitives sur un intervalle I, on est conduit alors à poser l'approximation : $\int_a^b f(x)dx \simeq (b - a)\times\frac{f(a)+f(b)}{2}$ qui signifie que l'on «approxime» f entre $a$ et $b$ par la fonction affine qui coïncide avec f en $a$ et en $b$.

**Pour des raisons de commodités, nous supposerons que $a < b$.** Considérons alors une subdivision de l'intervalle [$a$;$b$] de pas $h$. Cette subdivision est définie par l'entier $n$ tel que : $h = \frac{b-a}{n}$ et par la suite de réels : " $a$ , $a + h$ , ..., $a + k.h$ , ..., $a + n.h = b$ ". Sur chaque intervalle [ $a + k.h$ ; $a + (k+1).h$], où $k$ est un entier compris entre 0 et ($n$-1), l'intégrale de f sur intervalle peut être approximée par :

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)\,dx \simeq h.\frac{f(a+kh)+f(a+(k+1)h)}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on écrit alors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a+(n-1)n}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)\,dx$$

D'où, en utilisant l'approximation de chacune des intégrales de cette somme, **la formule d'approximation par la méthode des trapèzes:**

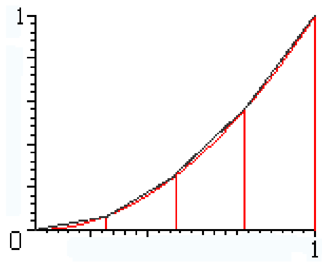
$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a+kh)+f(a+(k+1)h)}{2}\right)$$

C'est, bien sûr, une formule exacte si f est une fonction affine. On peut d'ailleurs démontrer, que :

**Si f est deux fois dérivable sur [$a$;$b$], et pour tout $x \in [a;b]$, $|f''(x)| \leq M$, où M est une constante réelle, alors l'erreur faite par la méthode des trapèzes dans le calcul de l'intégrale de f est majorée par**

$$M * \frac{(b-a)^2}{12\,n^2}$$

Prenons comme exemple, $\int_0^1 x^2 dx$ et comme pas $h$=0,25, c'est à dire $n$ = 4.




L'approximation par la méthode des trapèzes est : 0,34375 On peut la comparer avec la valeur exacte qui est 0,33333......
Pour $h$ = 0.1 c'.à.d $n$ = 10,
on obtient la valeur approchée : 0,335. On peut, bien sur, programmer un tel calcul. Un algorithme possible est :

1. Donner $a$ et $b$
2. Donner $n$
3. Calculer $h$
4. Poser $k$ = 0
5. Poser $x = a$
6. Poser y = $a + h / 2$
7. Poser S = 0
8. Poser $k$ = 0
9. S + [f($x$) + f($y$)] => S
10. $y$ => $x$
11. $y$+$h$ => $y$
12. $k$ + 1 => $k$
13. Si k < $n$ alors aller en 9
14. S*h / 2 => Résultat