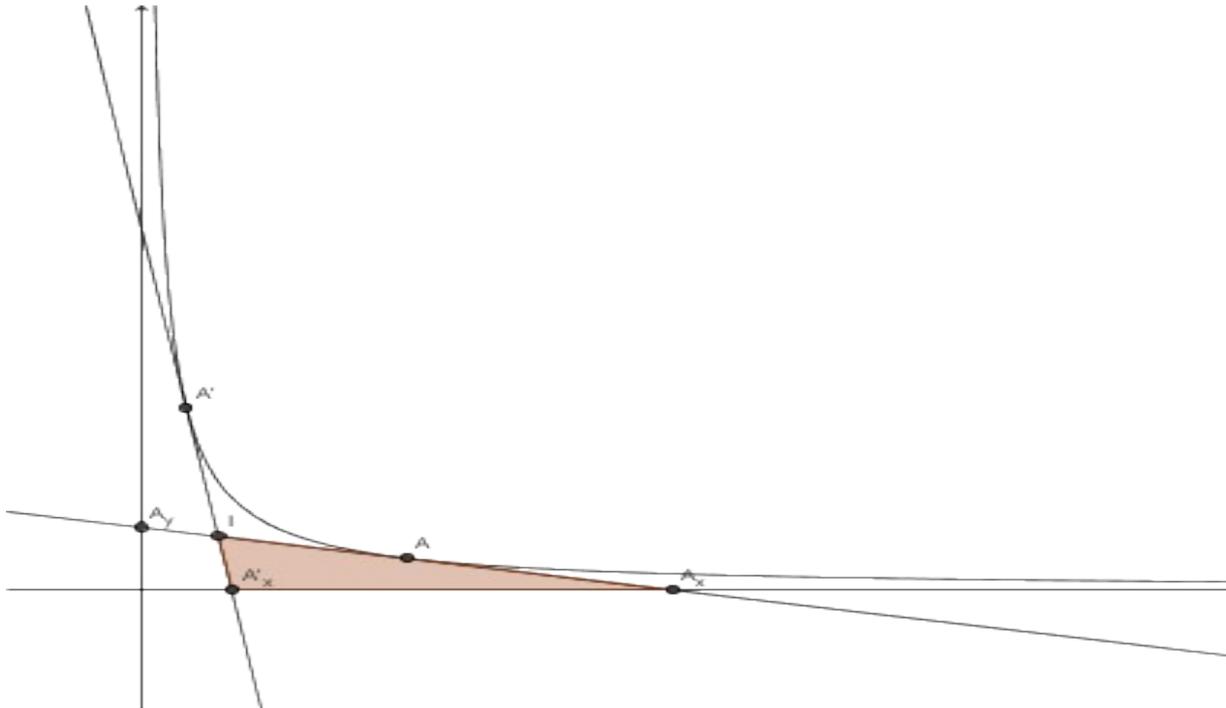


## Un exercice déroutant à propos des limites (Première)



La figure ci-dessus présente la situation d'origine de ce problème : à partir d'un nombre  $a$  positif, on définit les points  $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$  et  $A'\left(\frac{1}{a}, a\right)$  qui sont tous les deux sur la branche de l'hyperbole graphe de la fonction inverse  $\frac{1}{x}$ .

Les droites  $(A_y A_x)$  et  $(A' A'_x)$  sont les tangentes en  $A$  et  $A'$  à l'hyperbole.

$I$  est leur point d'intersection.

On s'intéresse à l'aire coloriée ;  
pour la calculer il faut :

- I a) établir les équations des deux tangentes, en fonction de  $a$ ,
- b) à partir de ces deux équations, calculer les coordonnées de  $I$  (qui sont égales, pourquoi ?),
- c) toujours à l'aide de l'équation de la tangente en  $A$ , calculer les abscisses des points  $A_x$  et  $A'_x$ ,
- d) Calculer la longueur  $A_x A'_x$  (attention : valeur absolue,  $a$  peut être plus petit que 1),
- e) en déduire l'expression  $S(a)$  de l'aire coloriée en fonction de  $a$ .

on peut alors :

- II Vérifier que  $S(1) = 0$  et établir les limites de  $S(a)$  lorsque  $a$  tend vers 0 et lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$