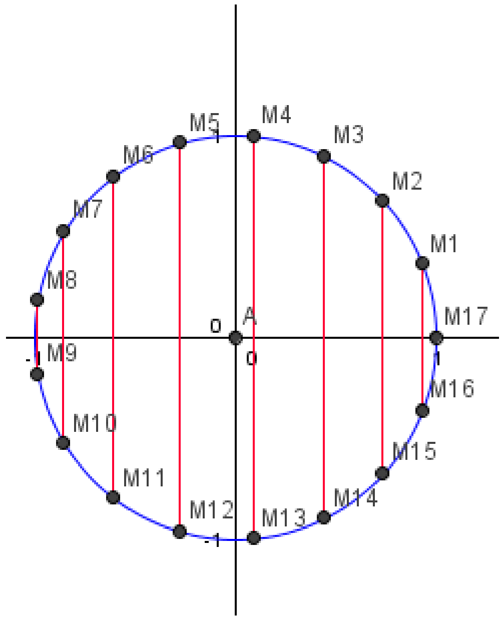
Problème de R. FERREOL, d'après ENAC 88 : CORRECTION (P Delannoy)



1. On peut utiliser l'expression de $\cos(a)$ en fonction de $\cos(2a)$ (Rappel : $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$). Appliquée pour x_1 qui vaut $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$, nombre positif, puisque si $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\cos(x)>0$,

   il vient que $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)=\sqrt{\frac{1+x_1}{2}}}$

   Mais on a aussi $x_8=\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$

   ce qui donne $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)=-x_8=-x_9}$

2. Figure donnée ci-contre (Geogebra)_________________________________>

3. La somme proposée est la partie réelle de la somme $\sum_{k=1}^{8} e^{ik\theta}$.

   Elle est égale à la partie réelle de la somme $\sum_{k=9}^{16} e^{ik\theta}$ par symétrie

   (conjugaison $M_{17-k}=\overline{M_k}$). Donc $2s$ est la partie réelle de $\sum_{k=1}^{16} e^{ik\theta}$ Mais cette somme S est égale à -1 car on a

   $(e^{i\theta}-1)S=e^{17i\theta}-e^{i\theta}$soit, comme $e^{17i\theta}=1$, $S=\frac{e^{i\theta}-1}{1-e^{i\theta}}$, soit $S=-1$; on a bien $\boxed{1+2s=0}$ donc *s est égale à* $-\frac{1}{2}$

4. L'égalité $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ appliquée avec $p=(k+l)\theta$ et $q=(k-l)\theta$ donne la linéarisation

   du produit $x_k x_l$ = $\cos(k\theta)\cos(l\theta)$ comme étant $x_k x_l=\frac{1}{2}(\cos((k+l)\theta)+\cos((k-l)\theta))$ d'où $\boxed{x_k x_l=\frac{x_{k+l}+x_{k-l}}{2}}$

   Par définition $x_{17-k}=\cos((17-k)\theta)=\cos(2\pi-k\theta)=\cos(k\theta)=x_k$ et de même $x_{17+k}=\cos(2\pi+k\theta)=\cos(k\theta)=x_k$

   on a bien $\boxed{\forall k\ x_{17-k}=x_{17+k}=x_k}$

5. a) La définition donne $s_1=x_1+x_9+x_{81}+x_{729}$
   Mais $x_9=x_8$ et comme $81\equiv 13\ (mod\ 17)$ on a $x_{81}=x_{13}=x_4$;
   de même $729\equiv 15\ (mod\ 17)$ donc $x_{729}=x_{15}=x_2$ et ainsi.. $\boxed{s_1=x_1+x_2+x_4+x_8}$.

   De même $s_2=x_3+x_{27}+x_{243}+x_{2187}$ et $x_{27}=x_{10}=x_7$, $x_{243}=x_5$, $x_{2187}=x_{11}=x_6$ d'où........... $\boxed{s_2=x_3+x_5+x_6+x_7}$

   b) s_1 est positive (3 termes positifs dont 2 sont supérieurs à 1/2 et un seul négatif supérieur à -1)
   s_2 est négative (3 termes négatifs dont deux sont inférieurs à -1/2 et un seul positif inférieur à 1)

   c) Le développement du produit $s_1 s_2$ fait apparaître les produits $x_k x_l$ pour k dans $\{1,2,4,8\}$ et l dans $\{3,5,6,7\}$
   Ces 16 termes, par la linéarisation précédente (établie en 4) donnent une somme de 32 fractions $\frac{x_i}{2}$, telle que chaque $\frac{x_i}{2}$ y figure exactement 4 fois pour i de 1 à 8 : ainsi $\boxed{s_1 s_2=2s=-1}$

   d) s_1 et s_2 sont donc telles que $s_1+s_2=-1/2$ et $s_1 s_2=-1$ Ces nombres sont les racines de $2x^2+x-2$; ce trinôme a pour discriminant 17 et donc par respect du signe étudié précédemment : $\boxed{s_1=\frac{\sqrt{17}-1}{4}\ et\ s_2=\frac{-\sqrt{17}-1}{4}}$

Notons au passage que $16(s_1^2+1)=34-2\sqrt{17}$ *et* $16(s_2^2+1)=34+2\sqrt{17}$

6. t_2 est positif car x_1 et x_4 le sont tous les deux. Donc $t_1 = s_1 - t_2 < 0$ car $s_1 < 0$

En développant le produit $2\,t_1\,t_2$ il vient $2(x_1\,x_2 + x_1\,x_8 + x_2\,x_4 + x_8\,x_4)$ qui par linéarisation donne s. Donc $\boxed{t_1\,t_2 = \frac{s}{2}}$

Comme $t_1 + t_2 = s_1$ ces nombres sont les racines de $4\,x^2 - 4\,s_1\,x - 1$ trinôme dont le discriminant est $16\left(s_1^2 + 1\right)$

d'où les valeurs cherchées : $\boxed{t_1 = \frac{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} \text{ et } t_2 = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}}$

7. t_3 est négatif, car x_6 et x_7 le sont tous les deux. Comme $t_4 = s_2 - t_3$ et $s_2 > 0$, t_3 est positif.

En développant le produit $2\,t_3\,t_4$ il vient $2\left(x_6\,x_3 + x_6\,x_5 + x_7\,x_3 + x_7\,x_5\right)$ qui par linéarisation donne s. Donc $\boxed{t_3\,t_4 = \frac{s}{2}}$

Comme $t_3 + t_4 = s_2$ ces nombres sont les racines de $4\,x^2 - 4\,s_2\,x - 1$ trinôme dont le discriminant est $16\left(s_2^2 + 1\right)$

d'où les valeurs cherchées : $\boxed{t_3 = \frac{-\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8} \text{ et } t_4 = \frac{-\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}}$

Notons au passage la valeur $t_1^2 - 2\,t_3$ *qui vaut* $\frac{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\left(\sqrt{17} - 1\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{64}$

8. Le produit $x_2\,x_8$ vaut $\frac{x_{10} + x_6}{2}$ soit $\frac{x_6 + x_7}{2}$ donc il est égal à $\frac{t_3}{2}$. Comme $x_2 + x_8 = t_1$, les deux nombres x_2 et x_8 sont les racines du trinôme $x^2 - t_1\,x + \frac{t_3}{2}$ dont le discriminant est $t_1^2 - 2\,t_3$; en étudiant leur signe, $x_2 > 0$ et $x_8 < 0$, x_8 est la racine négative et on obtient finalement que $\boxed{x_8 = \frac{t_1 - \sqrt{t_1^2 - 2\,t_3}}{2}}$

Mais (cf. question 1) x_8 vaut $\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right)$ ou $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right)$; donc ce nombre vaut $-\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ et il vient que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -x_8 = \frac{\sqrt{t_1^2 - 2t_3} - t_1}{2}}$$

Le calcul algébrique avec les racines carrées mène à :

$$\boxed{16\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\left(\sqrt{17} - 1\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} + 1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}$$

et le calcul numérique (Casio Collège à 10^{-9}) : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \sim 0{,}982973100}$

Vérification : $17 \cdot \arccos\left(0{,}982973100\right) = 3{,}141592654$

Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages.
Immortel Archimède,...