Problème d'après ENAC 88

Rédigé par R. FERREOL   ferreol@mathcurve.com

Le but de ce problème est de calculer $\cos\frac{\pi}{17}$ avec des radicaux, par une méthode que le mathématicien Karl Friedrich Gauss a découverte en 1796 à l'âge de 19 ans.

Ayant posé $\theta = \frac{2\pi}{17}$, désignons par M_k le point de coordonnées $\begin{cases} x_k = \cos k\theta \\ y_k = \sin k\theta \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1) Exprimer $\cos\frac{\pi}{17}$ en fonction de l'un des x_k.

2) Faire une figure soignée indiquant les points $M_1, M_2, \ldots, M_{16}$, en prenant soin de mettre sur une même verticale les points ayant même abscisse.

3) Soit $s = \sum_{k=1}^{8} x_k$; justifier l'égalité $1 + 2s = 0$.

4) Linéariser $x_k x_l$; vérifier que $x_k = x_{17-k} = x_{17+k}$.

5) Soit $s_1 = x_1 + x_{3^2} + x_{3^4} + x_{3^6}$ et $s_2 = x_3 + x_{3^3} + x_{3^5} + x_{3^7}$.

Nota : les puissances de 3 qui interviennent ici ne sont pas dues au hasard, mais au génie de Gauss qui a appliqué au cas 17 une théorie plus générale qu'il avait bâtie.

a) Réécrire les sommes s_1 et s_2 en faisant intervenir des x_i dont les indices sont compris entre 1 et 8.
b) Étudier les signes de s_1 et s_2.
c) Montrer que $s_1 s_2 = 2s$.
d) En déduire les valeurs de s_1 et s_2.

6) Soit $t_1 = x_2 + x_8, t_2 = x_1 + x_4$.
a) Étudier les signes de t_1 et t_2.
c) Montrer que $t_1 t_2 = s/2$.
d) En déduire la valeur de t_1.

7) Soit $t_3 = x_6 + x_7, t_4 = x_3 + x_5$.
déterminer t_3 par une méthode semblable à celle de 6).

8) a) vérifier que $x_2 x_8 = \frac{t_3}{2}$.

b) En déduire la valeur de x_8 puis de $\cos \frac{\pi}{17}$ à l'aide de radicaux carrés éventuellement superposés.

NOTA : le fait que l'on puisse exprimer $\cos \frac{\pi}{n}$ à l'aide de radicaux carrés est assez rare ; Gauss a montré que les seules valeurs de n où ceci est possible sont les nombres de la forme $2^m p_1 \dots p_r$ avec $m \in N$ et où les p_i sont des nombres de Fermat $2^{2^{k_i}} + 1$ premiers distincts. Or les seuls nombres de Fermat premiers que l'on connaît sont $3, 5, 17, 257$ et 65537 (et l'on pense qu'il n'y en a pas d'autre). ; cf M. Guinot, Gauss livre V tome 2, p. 180.