Géométrie. Fiches pour préparer le Bac S

I Rappels sur le barycentre (dans le plan et l'espace)

a) Propriété fondamentale :

$$G = \text{barycentre de } \{(A, a); (B, b); (C, c)\} \Leftrightarrow \forall M,\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$$

Homogénéïté : Pour tout réel k non nul, multiplier TOUS les «poids» par k ne change pas le barycentre. On appelle *Isobarycentre* le barycentre obtenu avec des «poids» égaux.

Alignement : Le barycentre de deux points A et B se trouve sur le droite AB (A, B, G sont alignés)

Coplanairéïté : Le barycentre de trois points A, B, C est dans le plan ABC

Coordonnées : les coordonnées x, y (et z) du barycentre sont les moyennes pondérées par a, b, c des coordonnées des points A, B, C : $x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ $y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$ (id. pour z_G dans l'espace).

Si l'on représente les points du plan par des *affixes* complexes, on a $z_G = \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$

Associativité : On ne change pas le barycentre d'un ensemble de points pondérés en remplaçant un sous ensemble des points par leur barycentre partiel affecté de la somme des poids correspondants.

Ainsi si A' est le barycentre de (B, b) et (C, c) B' celui de (A, a) et (C, c) et C' celui de (A, a) et (B, b) le barycentre G s'obtient comme barycentre de $A(a)$ et $(A', b+c)$ et se trouve sur la droite AA'; de même il se trouve sur BB' et sur CC' ; les trois droites sont donc concourantes.

b) Utilisation pour caractériser des ensembles de points :

Droite : Si A et B sont distincts, alors $M \in (AB) \Leftrightarrow M$ est le barycentre de (A,α) et (B, β) avec $\alpha + \beta = 1$
Une équation paramétrique de (AB) en découle puisque si $t = \alpha$ alors $\beta = 1 - t$: $x = t\,x_A + (1-t)\,x_B$, $y = t\,y_A + (1-t)\,y_B$ (et éventuellement $z = t\,z_A + (1-t)\,z_B$)

Segment : Le résultat précédent s'applique, et on a de plus $\alpha \in [0; 1]$ ET $\beta \in [0; 1]$; donc $t \in [0; 1]$ également.

Plan : $M \in (ABC) \Leftrightarrow$ M est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Triangle : M est un point intérieur au triangle ABC $\Leftrightarrow$ M est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec α, β et γ tous les trois dans $[0; 1]$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Ainsi on peut représenter par un diagramme les compositions possibles d'un mélange de trois produits. La plupart du temps le triangle est chois équilatéral. Chaque point intérieur représente UN mélange particulier, α, β et γ étant les proportions de chacun des trois produits correspondantes.

II Intersections (dans l'espace)

2 plans : on est amené à résoudre le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ en distinguant les cas :

$P_1 = P_2$ les deux équations sont proportionnelles : *tout point du plan $P_{1,2}$ est solution*
$P_1 // P_2$ les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont colinéaires : *pas de solution*
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires : il existe une droite solution, dont on obtient une équation paramétrée en choisissant pour t une des trois coordonnées.

3 plans : on a à résoudre un systéme de trois équations à trois inconnues : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$

et pour décrire toutes les situations il faut examiner aussi les sous systèmes de deux équations qui décrivent le problème de l'intersection de deux des 3 plans !

Ainsi suivant le nombre de solutions :

Aucune : si aucun des sous-systèmes n'a de solution, les trois plans sont parallèles deux à deux ! si chacun des sous-systèmes a une infinité de solutions, les droites intersections sont parallèles 2 à 2. si l'un a une infinité de solutions et les deux autres, aucune, deux plans sont identiques et // au troisième. si l'un n'a aucune solution et les deux autres une infinité, deux plans sont parallèles entre eux et coupent le troisième suivant deux droites parallèles.	*Une seule :* Chaque paire de plans définit une droite, et ces trois droites sont concourantes ; le point soultioin est aussi obtenu de trois façons différentes comme intersection d'un plan et d'une droite (intersection des deux autres plans).	*Une infinité :* si chacun des sous-systémes à une infinité de solutions, la droite intersection de chacune des paires de plans est toujours la même ; les trois plans peuvent être identiques, ou deux confondus et le troisième les coupe suivant une droite.

Droite et plan :
En définissant la droite comme intersection de deux plans, on retrouve le même système qui peut avoir :
une solution l'intersection est un point ; *0 solution* la droite est // au plan ; *une infinité de solutions* : la droite est DANS le plan